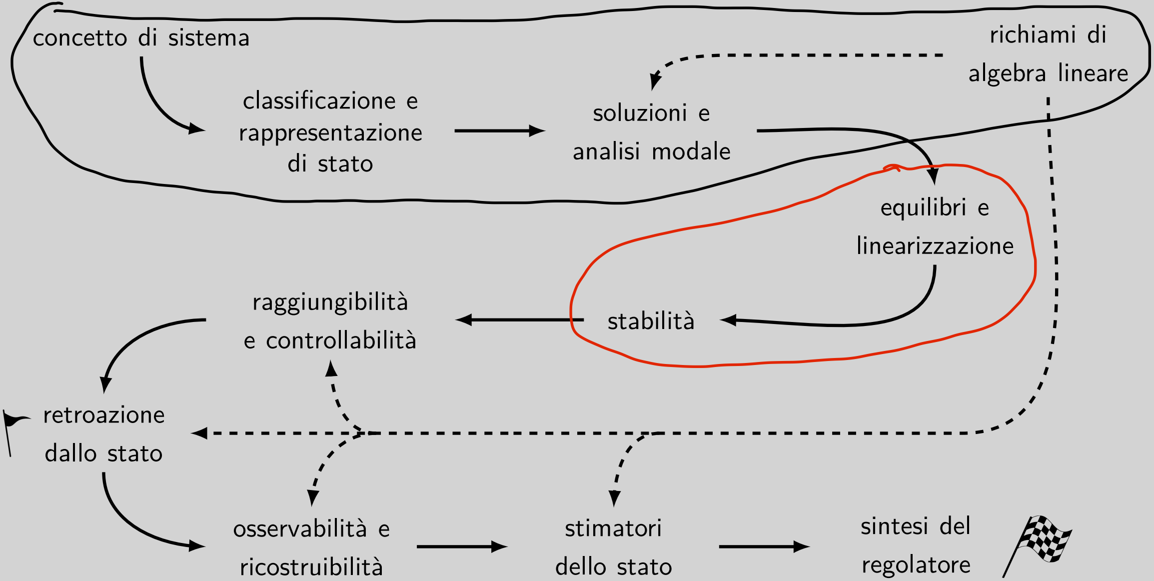
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

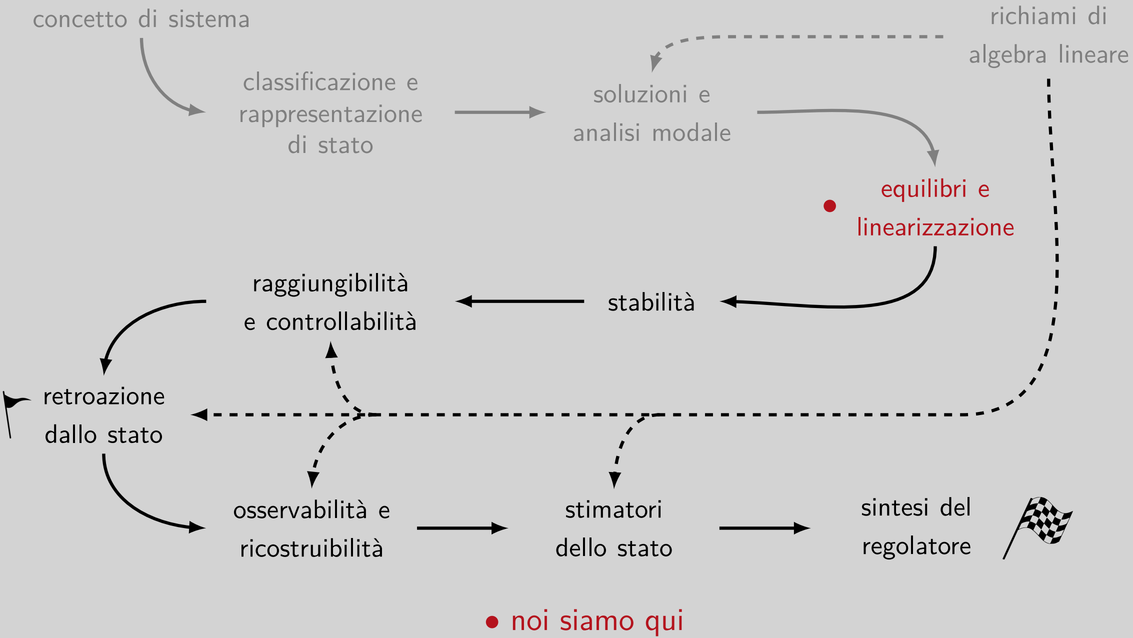
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Punti di equilibrio, definizioni di stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
noi siamo qui

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

In questa lezione

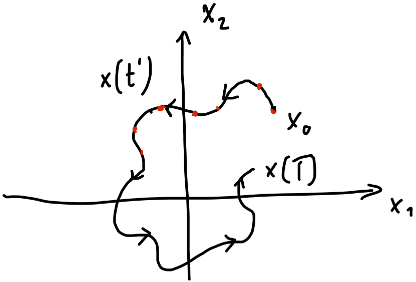
- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Traiettorie di stato e ritratto di fase

non lineare

$$\dot{x}(t) = \overset{\downarrow}{f}(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)}$$



Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$: $\underline{\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}}$

<u>Ritratto di fase del sistema</u> = insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

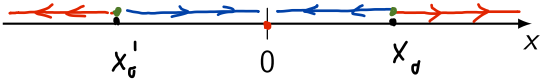
Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 1D

$\dot{x}(t) = fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$f > 0$ $f = 0$

$f < 0$



$\underline{f \in \mathbb{R}}$,

$\underline{x(t) = e^{ft}x_0 \quad \text{(t.c.)}}$

$x(t) = f^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

x_0 autovett. rel. a λ_1: $e^{Ft}x_0 = e^{\lambda_1 t}x_0$

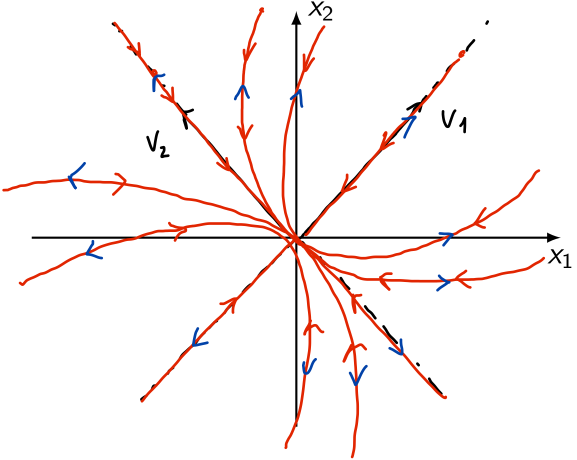
$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$$\boxed{x(t) = e^{Ft}x_0 \qquad \text{(t.c.)}}$$

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

nodo instabile / nodo stabile

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lambda_1 > \lambda_2 > 0}$ o $\boxed{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

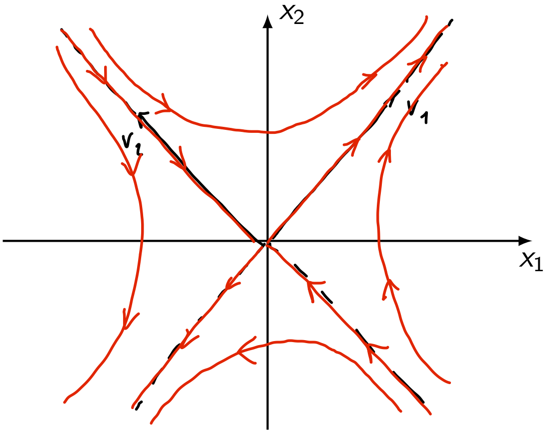
$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

sella

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \underline{\lambda_1 > 0 > \lambda_2}$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

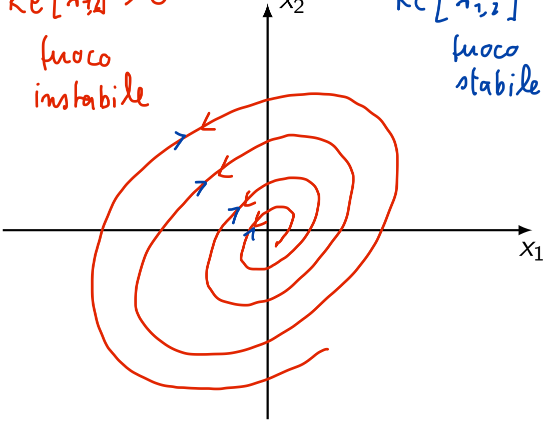
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (complessi coniugati)

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] > 0$

fuoco instabile

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] < 0$

fuoco stabile



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

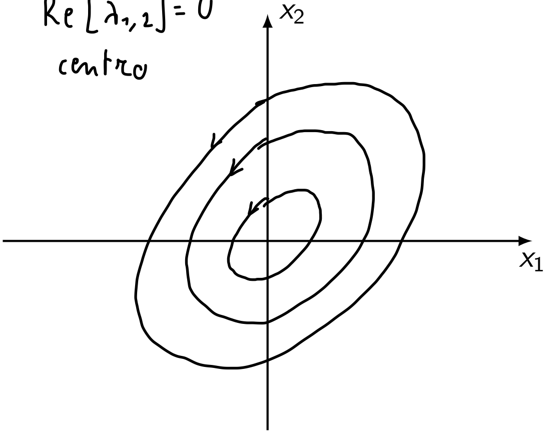
$$x(t) = e^{Ft}x_0 \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t) = F^t x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (complessi coniugati)

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] = 0$

centro



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$F = \lambda_1 I$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

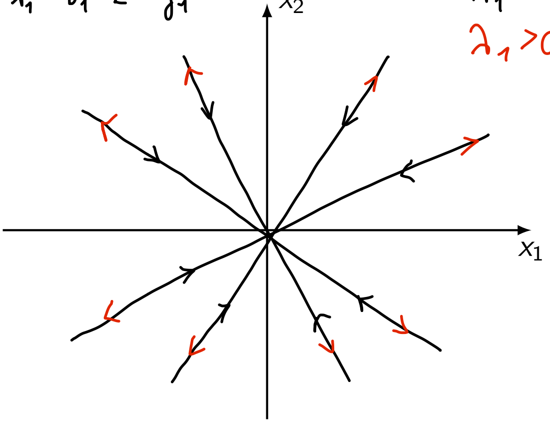
$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

$\lambda_1 \quad \nu_1 = 2 = g_1$

$\lambda_1 < 0$

$\lambda_1 > 0$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

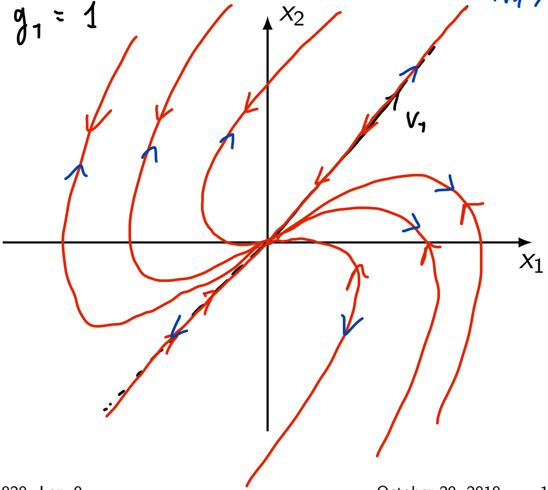
$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

$\lambda_1 < 0$

$\lambda_1 > 0$

$g_1 = 1$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

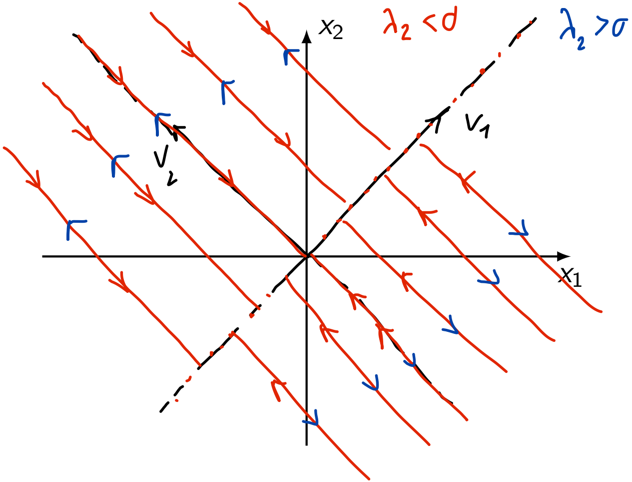
$$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t) = F^t x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lambda_1 = 0 \text{ e } \lambda_2 \neq 0,}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

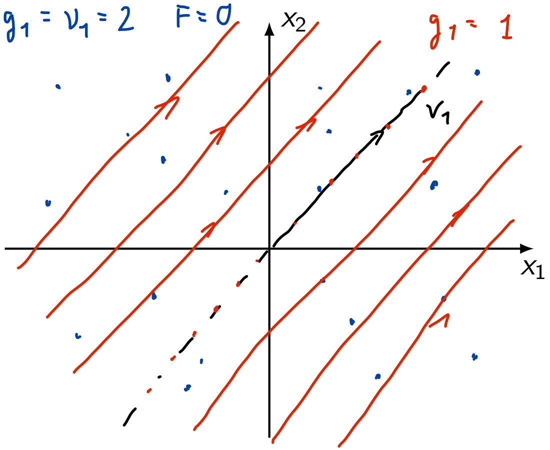


Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari 2D

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0,\ \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 0}$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari nD

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n}, \text{ autovalori } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.) $x(t) = e^{Ft}x_0$

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.) $x(t) = F^t x_0$

Fatto generale: Una traiettoria $x(t)$ giace su una retta passante per l'origine se e solo se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di F relativo ad un autovalore reale.

x_0 autovettore relativo a λ_i : $e^{Ft}x_0 = e^{\lambda t}x_0$

In questa lezione

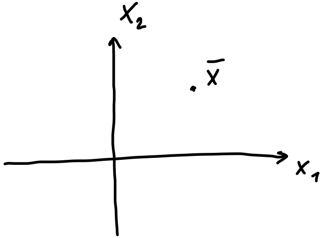
- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Punti di equilibrio

non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$



punto fisso

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio } \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio } \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{(t.c.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Caso lineare: $\bar{x}$ equilibrio $\iff$ $\bar{x} \in \ker F$ (t.c.) $F\bar{x} = 0$

$\bar{x} \in \ker(F - I)$ (t.d.) $\bar{x} = F\bar{x}$

$(F - I)\bar{x} = 0$

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \longrightarrow \bar{x}(1-\bar{x}) = 0 \rightarrow \bar{x}_1 = 0,\ \bar{x}_2 = 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \longrightarrow \bar{x}^2 + 1 = 0 \longrightarrow$ NO EQ.

3. $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{F} x \longrightarrow F\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

INFINITI EQ.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1 - x) \quad \Longrightarrow \quad$ due equilibri: $\bar{x} = 0, 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \quad \Longrightarrow \quad$ unico equilibrio: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad \Longrightarrow \quad$ infiniti equilibri: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante},\ u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{cases} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 & \text{(t.c.)} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) & \text{(t.d.)} \end{cases}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante},\ u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

$F\bar{x} + G\bar{u} = 0$

caso lineare

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{array}{lll} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 & F\bar{x} = -G\bar{u} & \text{(t.c.)} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) & (F - I)\bar{x} = -G\bar{u} & \text{(t.d.)} \end{array}$$

$\bar{x} = F\bar{x} + G\bar{u}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

extra

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0$ $\longrightarrow$ $\bar{u} = 0$ NO EQ.

INFINITI EQ

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \bar{u}$ $\begin{cases} 0 = 0 \\ \bar{x}_2 = \bar{u} \end{cases}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

extra

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \qquad \Longrightarrow \qquad$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases} \qquad \Longrightarrow$

nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$

un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$

due equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

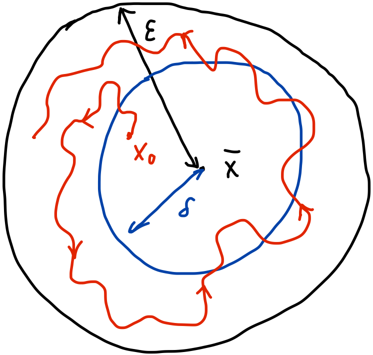
In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Stabilità semplice (alla Lyapunov)

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto semplicemente stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

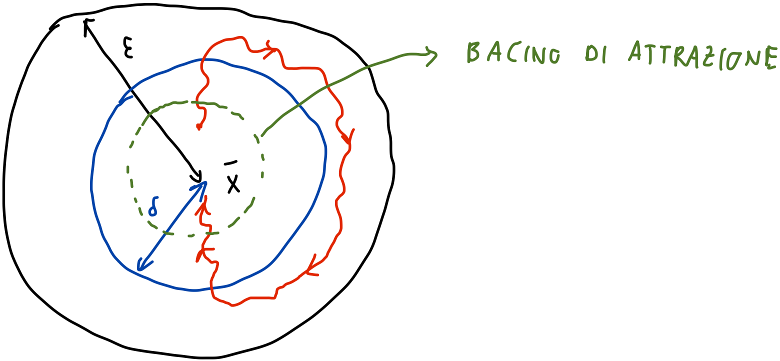


Stabilità asintotica

extra

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.



Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. La definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se le condizioni valgono per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si ha stabilità semplice/asintotica globale.

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. La definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se le condizioni valgono per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si ha stabilità semplice/asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un cambio di variabile, si può portare l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

$\dot{x} = Fx \quad \bar{x} \neq 0 \qquad z = x - \bar{x} \quad \bar{z} = 0$

$\hookrightarrow x = z + \bar{x}$

$\hookrightarrow \dot{z} = F(z + \bar{x}) = Fz$

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. La definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se le condizioni valgono per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si ha stabilità semplice/asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un cambio di variabile, si può portare l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

3. Per sistemi lineari stabilità locale = stabilità globale. Inoltre:

$\mathrm{Re}[\lambda_i] < 0$

F Hurwitz

$$\text{stabilità semplice} \iff \begin{array}{ll} e^{Ft} \text{ limitata} & \text{(t.c.)} \\ F^t \text{ limitata} & \text{(t.d.)} \end{array}$$

F Schur

$$\text{stabilità asintotica} \iff \begin{array}{ll} e^{Ft} \text{ convergente} & \text{(t.c.)} \\ F^t \text{ convergente} & \text{(t.d.)} \end{array}$$

$|\lambda_i| < 1$

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

non lineare

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

Sviluppo di Taylor attorno $\bar{x}$ di f:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \cdots \approx \underbrace{f(\bar{x})}_{=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \cdots \approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$:

$$\boxed{\dot{z} = \overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})}^{F} z, \quad z \triangleq x - \bar{x}}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Jacobiano di f valutato in x

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots, \qquad J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Jacobiano di f valutato in x

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots, \qquad J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$:

$$\boxed{\dot{z} = \overbrace{J_f(\bar{x})}^{F}\, z, \quad z \triangleq x - \bar{x}}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

extra

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad$ $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

extra

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \begin{array}{l} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{z} = -z, \; z \triangleq x - \pi \end{array}$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \; \bar{x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Punti di equilibrio, definizioni di stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

extra

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0$
2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$
3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

back

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 + \bar{u} \end{cases} \qquad \begin{cases} '' \\ \bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + \bar{u} = 0 \end{cases} \qquad \bar{x}_1^{(1,2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2}$$

1) $1 - 4\bar{u} < 0 \Rightarrow$ NO EQ.

2) $1 - 4\bar{u} = 0 \Rightarrow$ 1 EQ. $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

3) $1 - 4\bar{u} > 0 \Rightarrow$ 2 EQ. $\bar{x}' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(1)} \\ \bar{x}_1^{(1)} \end{bmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^{(2)} \\ \bar{x}_1^{(2)} \end{bmatrix}$

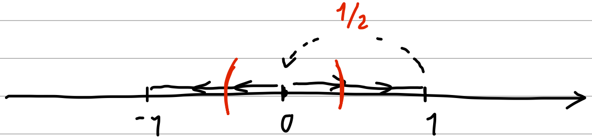
Stabilità asintotica

extra

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.

$$x(t+1) = \begin{cases} 2\,x(t) & |x(t)| < 1 \\ 0 & |x(t)| \geq 1 \end{cases}$$



$\bar{x} = 0$ convergente ma non semplicemente stabile!

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

extra

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad \bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \bar{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1) $\dot{x} = \sin x$ $\quad$ 1] $\bar{x}_1 = 0$
2] $\bar{x}_2 = \pi$

Sviluppo di Taylor rispetto a $\bar{x}$:

$$\sin x = \sin \bar{x} + \cos \bar{x} \, (x - \bar{x}) + \dots$$

1] $\dot{x} = x$

2] $\dot{z} = -z \qquad z = x - \pi$

back

2) $\dot{x} = \alpha x^3 \qquad \bar{x} = 0$

$\dot{x} = 0 \qquad \forall \alpha$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \overbrace{-x_2 + x_1 x_2^2}^{f_1} \\ \dot{x}_2 = \underbrace{x_1 + x_2^2}_{f_2} \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} x_2^2 & -1 + 2x_1 x_2 \\ 1 & 2x_2 \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

back

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$