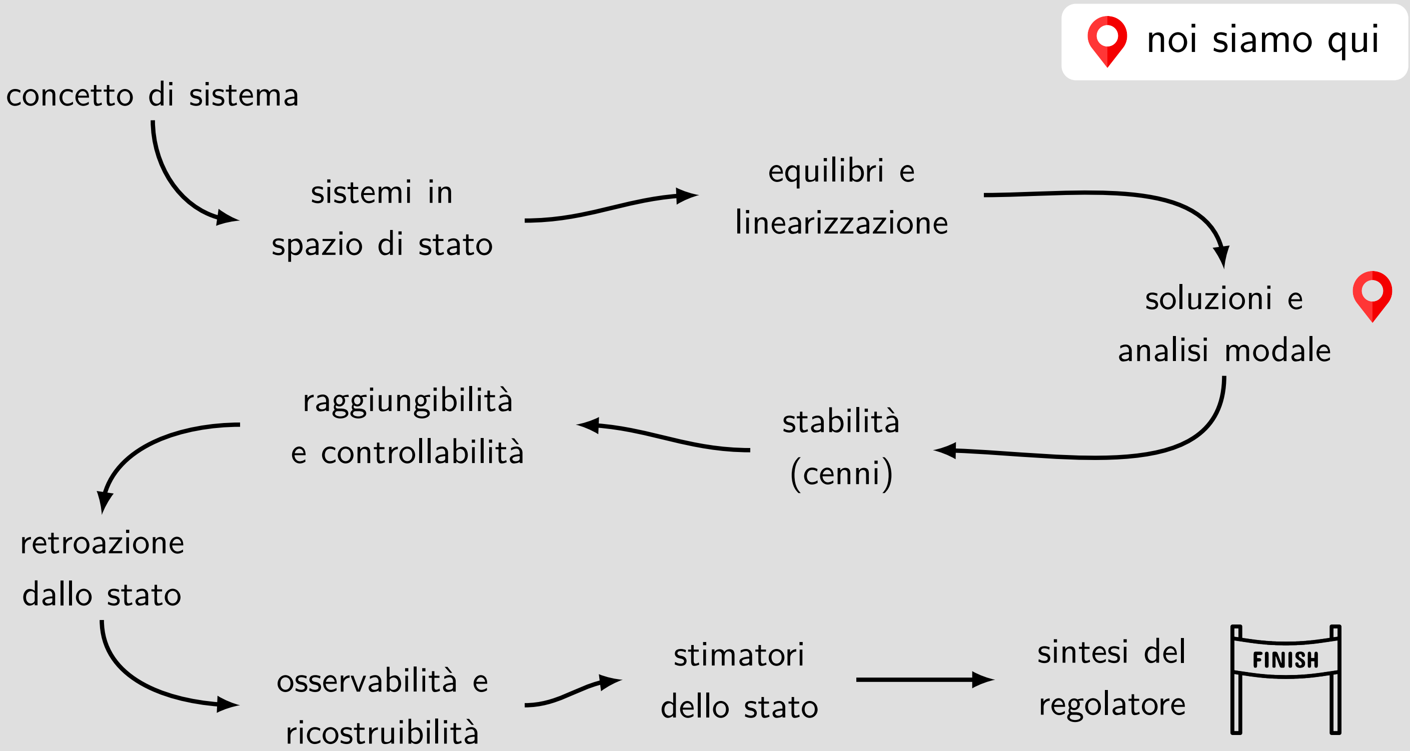
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

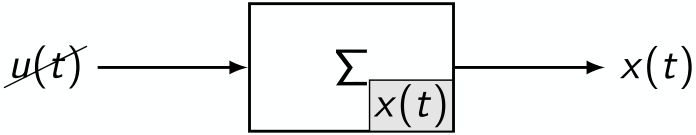
Nella scorsa lezione

- Soluzioni di sistemi lineari autonomi a t.c.
- Esponenziale di matrice $$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!}$$
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

In questa lezione

- ▷ Analisi modale ed evoluzione libera di un sistema lineare a t.c.
- ▷ Evoluzione complessiva di un sistema lineare a t.c.
- ▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0$$

Come calcolare e^{Ft}?

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Trovare una matrice } T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ tale che } T^{-1}FT = F_J \text{ !!}}$

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

F ha autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

$F_J = T^{-1} F T$

1. $F = T F_J T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_J t} T^{-1}$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow F^k = \begin{bmatrix} F_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_{nn}^k \end{bmatrix}$$

2. $$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \implies e^{F_J t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{array}\right]$$

3. $$J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array}\right] \implies e^{J_{\lambda_i} t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_i,g_i} t} \end{array}\right]$$

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$

$e^{Ft} = T e^{F_J t} T^{-1}$

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} =$$ modi elementari del sistema

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

note

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco di J_{λ_i}

note

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco di J_{λ_i}

2. F diagonalizzabile $\implies$ modi elementari $= e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

note

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco di J_{λ_i}

2. F diagonalizzabile $\implies$ modi elementari $= e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

3. $\underset{\sigma + i\omega}{\underset{\downarrow}{\lambda}} \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow$ $\underset{\sigma - i\omega}{\underset{\downarrow}{\bar{\lambda}}}$ autovalore $\Rightarrow$ modi reali $t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

note

Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

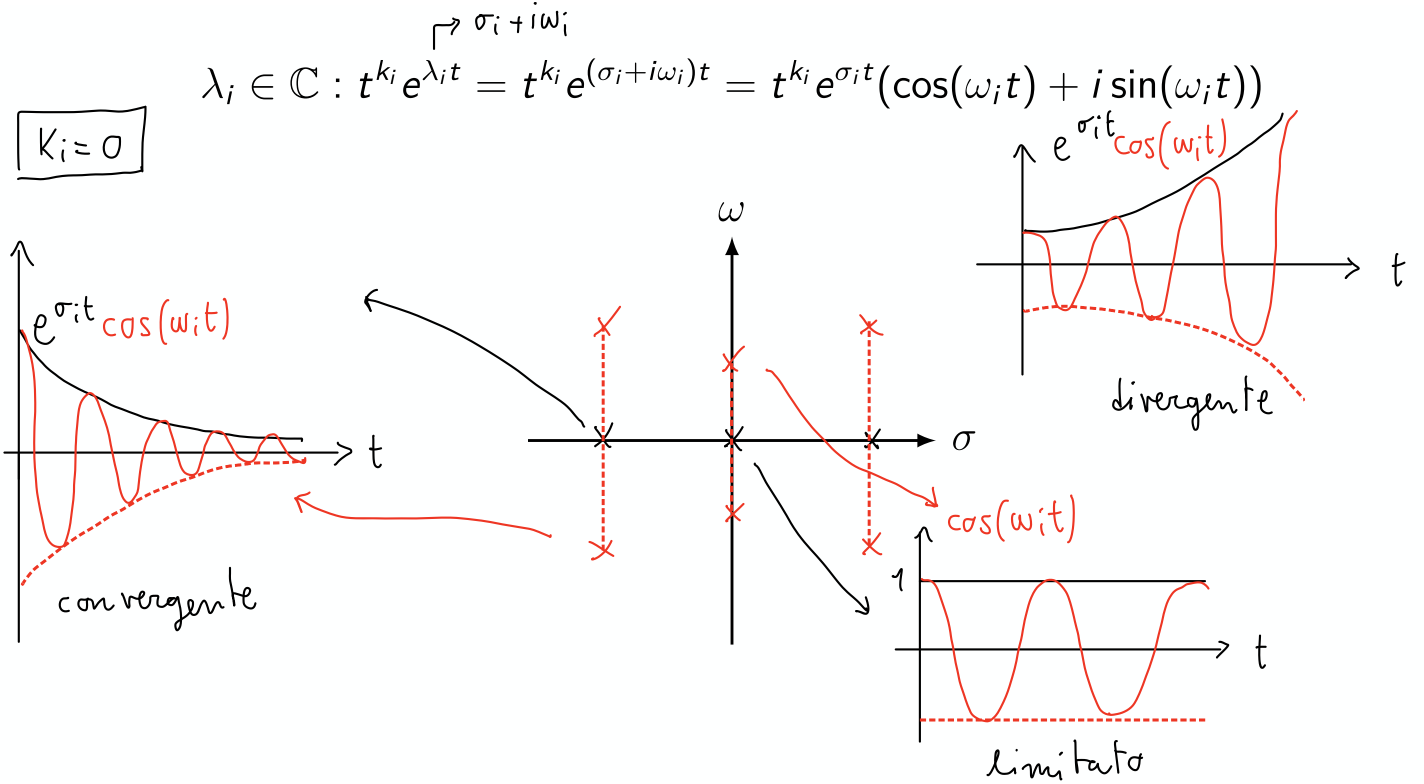
$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) \overset{H x_\ell(t)}{=} He^{Ft}x_0 = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

$=$ combinazione lineare di vettori contenenti i modi elementari!

Carattere dei modi elementari

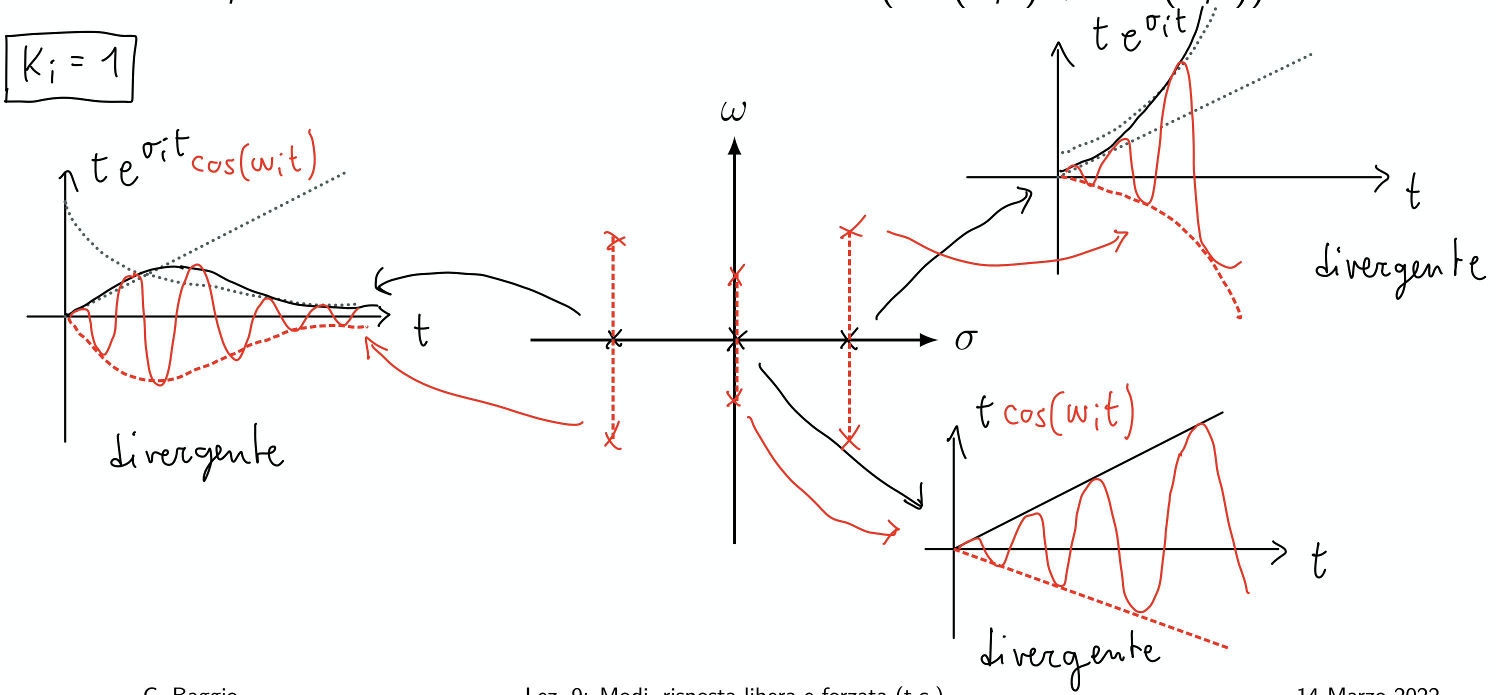
$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Carattere dei modi elementari

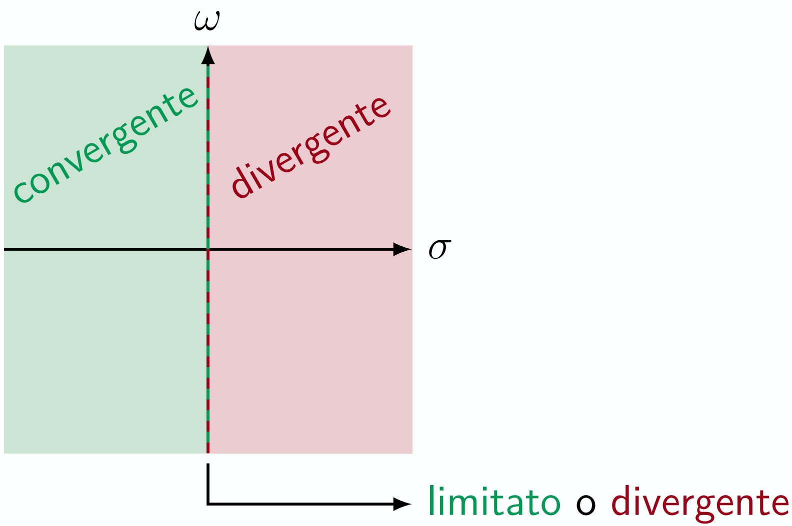
$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$

$\boxed{k_i = 1}$



Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C}: t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

parte reale

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad e^{Ft} \xrightarrow{t \to \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0 \quad \forall x_0, H$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \qquad \iff \qquad e^{Ft} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$$\begin{array}{c}\Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0\end{array} \qquad \iff \qquad e^{Ft} \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ limitata} \quad \forall H, x_0$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad e^{Ft} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$$\begin{array}{c} \Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{Ft} \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ limitata}$$

$$\begin{array}{c} \exists\, \lambda_i \text{ tale che } \Re[\lambda_i] > 0 \\ \text{o } \Re[\lambda_i] = 0 \text{ e } \nu_i > g_i \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{Ft} \text{ non limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ ?}$$

dipende da H, x_0

In questa lezione

- ▷ Analisi modale ed evoluzione libera di un sistema lineare a t.c.
- ▷ Evoluzione complessiva di un sistema lineare a t.c.
- ▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Evoluzione complessiva (libera + forzata)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

sovrapposizione degli effetti

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \qquad x_f(t)\ ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \qquad y_f(t)\ ??$$

note

Evoluzione complessiva (libera + forzata)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione complessiva con Laplace

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

note

Evoluzione complessiva con Laplace

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - F)^{-1}GU(s)}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

note

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1. $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare e^{Ft} !!

In questa lezione

▷ Analisi modale ed evoluzione libera di un sistema lineare a t.c.

▷ Evoluzione complessiva di un sistema lineare a t.c.

▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

note

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\ G,\ H,\ J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G,\ H' = HT,\ J' = J)$$

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\ G,\ H,\ J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G,\ H' = HT,\ J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

note

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\, G' = T^{-1}G,\, H' = HT,\, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) \text{ !!}$$

note

Poli della matrice di trasferimento

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + J = p\left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} W_{11}(s) & \cdots & W_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{p1}(s) & \cdots & W_{pm}(s) \end{bmatrix}}^{m} \right.$$

ha elementi polinomi di grado al max n

$$H \, \frac{\mathrm{adj}(sI-F)}{\det(sI-F)} \, G + J$$

$\det(sI-F) \longrightarrow$ polinomio di grado n

$$W_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)} = \text{funzioni razionali proprie } (\deg D_{ij}(s) \geq \deg N_{ij}(s))$$

N.B. $p \in \mathbb{C}$ è un polo di $W(s)$ se $p \in \mathbb{C}$ è un polo di almeno un $W_{ij}(s)$

Poli della matrice di trasferimento

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + J = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \cdots & W_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{p1}(s) & \cdots & W_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)} = \text{funzioni razionali proprie } (\deg D_{ij}(s) \geq \deg N_{ij}(s))$$

N.B. $p \in \mathbb{C}$ è un polo di $W(s)$ se $p \in \mathbb{C}$ è un polo di almeno un $W_{ij}(s)$

$$\boxed{(sI - F)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)} \implies \{\text{poli } W(s)\} \subseteq \{\text{autovalori } F\}}$$

$\Delta_F(s) = \det(sI - F) =$ pol. caratteristico di F

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata
(tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco di J_{λ_i}

2. F diagonalizzabile $\implies$ modi elementari $= e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

3. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow \bar{\lambda}$ autovalore $\Rightarrow$ modi reali $t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

note

$\lambda_i = \sigma + i\omega$

$$[e^{Ft}]_{kh} = \underset{\substack{\downarrow \\ a+ib}}{c_i}\, e^{\lambda_i t} + \bar{c}_i\, e^{\bar{\lambda}_i t} = (a+ib)\, e^{(\sigma+i\omega)t} + (a-ib)\, e^{(\sigma-i\omega)t}$$

$$= (a+ib)\, e^{\sigma t}\left(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right) + (a-ib)\, e^{\sigma t}\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)$$

$$= 2a\,\underbrace{e^{\sigma t}\cos(\omega t)} - 2b\,\underbrace{e^{\sigma t}\sin(\omega t)}$$

modi reali associati all'autovalore $\lambda_i \in \mathbb{C}$

Evoluzione complessiva (libera + forzata)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \qquad x_f(t) \text{ ??}$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \qquad y_f(t) \text{ ??}$$

note

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(\tau) = Fx(\tau) + Gu(\tau)$$

$$e^{-F\tau}\dot{x}(\tau) = e^{-F\tau}Fx(\tau) + e^{-F\tau}Gu(\tau)$$

$$e^{-F\tau}\dot{x}(\tau) - e^{-F\tau}Fx(\tau) = e^{-F\tau}Gu(\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{-F\tau}x(\tau)\right) = e^{-F\tau}Gu(\tau)$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{-F\tau}x(\tau)\right)d\tau = \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-Ft}x(t) - \underbrace{e^{-F\cdot 0}}_{I}x(0) = \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-Ft}x(t) = \left(x(0) + \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)\,d\tau\right)$$

$$e^{Ft} \qquad e^{Ft}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau}_{x_f(t)} \longrightarrow \text{Formula di Lagrange}$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t) = He^{Ft}x_0 + \int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau + Ju(t)$$

$$= \underbrace{He^{Ft}x_0}_{y_\ell(t)} + \overbrace{\int_0^t \left[He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)\right]u(\tau)\,d\tau}^{y_f(t)}$$

delta di Dirac

$$y_f(t) = [w * u](t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) =$$ risposta impulsiva del sistema

matrice delle risposte impulsive

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i \qquad y(t) = \left[He^{Ft}G + J\delta(t)\right]_{:,i}$$

Evoluzione complessiva con Laplace

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

note

$$\mathcal{L}[\dot{v}(t)] = s\,\mathcal{L}[v(t)] - v(0) = s\,V(s) - v(0)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = F\mathcal{L}[x(t)] + G\mathcal{L}[u(t)] \\ \mathcal{L}[y(t)] = H\mathcal{L}[x(t)] + J\mathcal{L}[u(t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) + JU(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI-F)^{-1}x_0 + (sI-F)^{-1}GU(s) \\ Y(s) = H(sI-F)^{-1}x_0 + H(sI-F)^{-1}GU(s) + JU(s) \end{cases}$$

$$X(s) = \overbrace{(sI-F)^{-1}x_0}^{X_\ell(s)} + \overbrace{(sI-F)^{-1}GU(s)}^{X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI-F)^{-1}x_0}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI-F)^{-1}G + J]\,U(s)}_{Y_f(s) = W(s)U(s)}$$

$W(s) = H(sI-F)^{-1}G + J = \mathcal{L}[w(t)]$ = matrice di trasferimento

$$X_\ell(s) = (sI-F)^{-1}x_0 = \mathcal{L}[x_\ell(t)] = \mathcal{L}[e^{Ft}x_0] = \mathcal{L}[e^{Ft}]\,x_0$$

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1}$$

$$(sI - F)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{Ft}$$

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

$$z = T^{-1}x \longrightarrow x = Tz$$

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \xrightarrow{z = T^{-1}x} \begin{cases} T\dot{z}(t) = FTz(t) + Gu(t) \\ y(t) = HTz(t) + Ju(t) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \Sigma': \begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t) \\ y(t) = HTz(t) + Ju(t) \end{cases}$$

$$\Sigma = (F, G, H, J) \xrightarrow{z = T^{-1}x} \Sigma' = (F', G', H', J') = (T^{-1}FT, T^{-1}G, HT, J)$$

$\downarrow$

sistema algebricamente equivalente a Σ

Equivalenza algebrica

$$\dot z(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G,\ H' = HT,\ J' = J)$$

$$\Sigma = (F, G, H, J)$$

$$\Sigma' = (F', G', H', J') = (T^{-1}FT, T^{-1}G, HT, J)$$

$$\begin{aligned}
W'(s) &= H'(sI - F')^{-1}G' + J' \\
&= HT(sI - T^{-1}FT)^{-1}T^{-1}G + J \\
&= HT(T^{-1}(sI - F)T)^{-1}T^{-1}G + J \\
&= H\cancel{T}\cancel{T^{-1}}(sI - F)^{-1}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G + J \\
&= H(sI - F)^{-1}G + J = W(s)
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Sistemi algebricamente equivalenti hanno la stessa matrice di trasferimento (lo stesso comportamento I/O)