

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata
(tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

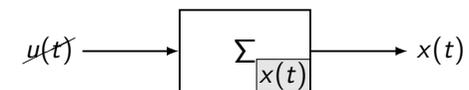
A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Analisi modale ed evoluzione libera di un sistema lineare a t.c.
- ▷ Evoluzione complessiva di un sistema lineare a t.c.
- ▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft} x_0$$

Come calcolare e^{Ft} ?

Calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$



Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT = F_J$!!

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

$$1. F = TF_J T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_J t} T^{-1}$$

$$2. F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_k} \end{bmatrix} \implies e^{F_J t} = \begin{bmatrix} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{bmatrix}$$

$$3. J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{bmatrix} \implies e^{J_{\lambda_i} t} = \begin{bmatrix} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{J_{\lambda_i,g_i} t} \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

$$4. J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies e^{J_{\lambda_i,j} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t e^{\lambda_i t} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a $\lambda_i = \dim.$ del più grande miniblocco di J_{λ_i}
2. F diagonalizzabile \implies modi elementari = $e^{\lambda_i t}$ (esponenziali **puri**)
3. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\implies \bar{\lambda}$ autovalore \implies modi **reali** $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t), t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$

Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

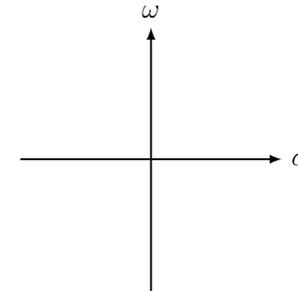
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$y(t) = y_\ell(t) = He^{Ft}x_0 = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

= combinazione lineare di vettori contenenti i modi elementari!

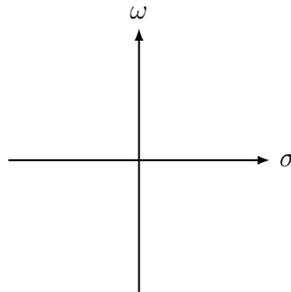
Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



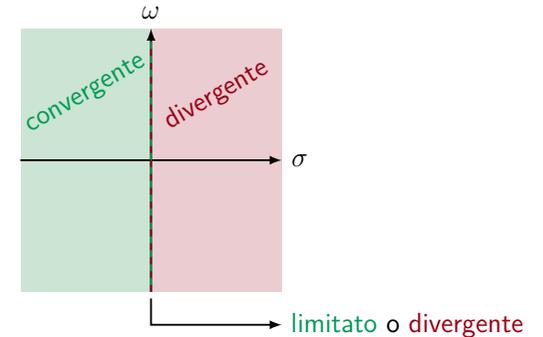
Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t} (\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Comportamento asintotico

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \iff e^{Ft} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i \text{ e } \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0 \iff e^{Ft} \text{ limitata} \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ limitata}$$

$$\exists \lambda_i \text{ tale che } \Re[\lambda_i] > 0 \text{ o } \Re[\lambda_i] = 0 \text{ e } \nu_i > g_i \iff e^{Ft} \text{ non limitata} \implies y(t) = He^{Ft}x_0 ?$$

Evoluzione complessiva (libera + forzata)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \quad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \quad x_f(t) ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \quad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \quad y_f(t) ??$$

Evoluzione complessiva (libera + forzata)

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau) d\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione complessiva con Laplace

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st} dt$$

$$X(s) = \underbrace{(sl - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sl - F)^{-1}GU(s)}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sl - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sl - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1. $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento
2. $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare e^{Ft} !!

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \quad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT, G' = T^{-1}G, H' = HT, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) !!$$

Poli della matrice di trasferimento

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + J = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \cdots & W_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{p1}(s) & \cdots & W_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

$$W_{ij}(s) = \frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}(s)} = \text{funzioni razionali proprie (deg } D_{ij}(s) \geq \text{deg } N_{ij}(s))$$

N.B. $p \in \mathbb{C}$ è un polo di $W(s)$ se $p \in \mathbb{C}$ è un polo di almeno un $W_{ij}(s)$

$$(sI - F)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)} \implies \{\text{poli } W(s)\} \subseteq \{\text{autovalori } F\}$$