Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ o $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

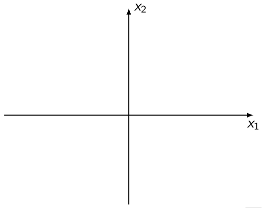
$\dot{x}(t) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)



note

$$\dot{x}(t) = F\,x(t) \qquad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad x(0) = x_0$$

F ha autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$

<u>Proprietà</u>: Se x_0 è un autovettore di F relativo ad un autovalore λ_i:

$$x(t) = e^{\lambda_i t} x_0$$

Se x_0 è autovettore di F relativo a λ_i:

$$F x_0 = \lambda_i x_0$$

$$F^2 x_0 = F\cdot(F x_0) = \lambda_i F x_0 = \lambda_i^2 x_0$$

$$\vdots$$

$$F^k x_0 = \lambda_i^k x_0$$

$$x(t) = e^{Ft} x_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k\right) x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(F^k x_0) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\lambda_i^k\right) x_0 = e^{\lambda_i t} x_0$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0$

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

note

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ è equilibrio $\iff \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 + \bar{u} \end{cases}$

$$\begin{cases} " \\ \bar{x}_1 = \bar{x}_1^2 + \bar{u} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + \bar{u} = 0$$

$$\bar{x}_1^{(1,2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2}$$

1) $1 - 4\bar{u} > 0$: $\quad \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix} \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$

$\bar{u} < 1/4$

2) $1 - 4\bar{u} = 0$: $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$\bar{u} = 1/4$

3) $1 - 4\bar{u} < 0$: $\nexists$ equilibri

$\bar{u} > 1/4$

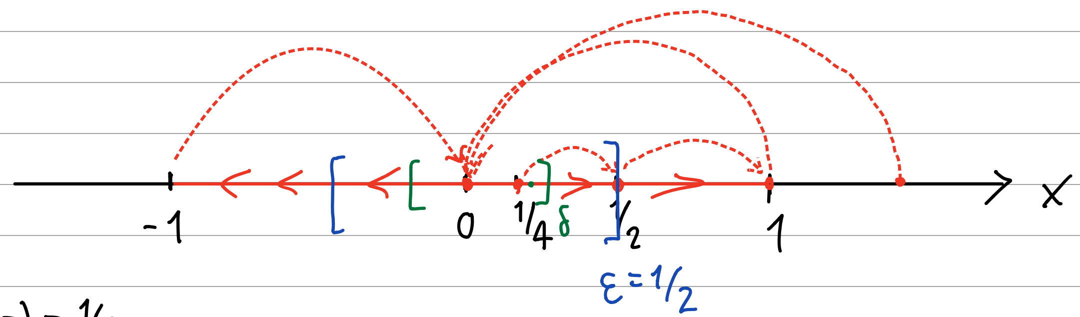
Stabilità asintotica

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & |x(t)| < 1 \\ 0 & |x(t)| \geq 1 \end{cases}$$

$\bar{x} = 0$ è equilibrio



$x(0) = 1/4$
$x(1) = 1/2$
$x(2) = 1$
$x(3) = 0$

$\bar{x}$ è convergente
ma non semplicemente stabile

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \bar{x} = 0, \ \bar{x} = \pi$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

note

1) $\dot{x} = \sin x, \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}$ eq. $\iff \sin \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\bar{x} = 0: \qquad \dot{x} = \cos(0)\, x = x$

$\bar{x} = \pi: \qquad \dot{z} = \cos(\pi)\, z = -z$

2) $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = 0$ eq.

Sistema linearizzato: $\dot{x} = 0$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} x_2^2 & -1 + 2x_1x_2 \\ 1 & 5x_2^4 \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema linearizzato: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$