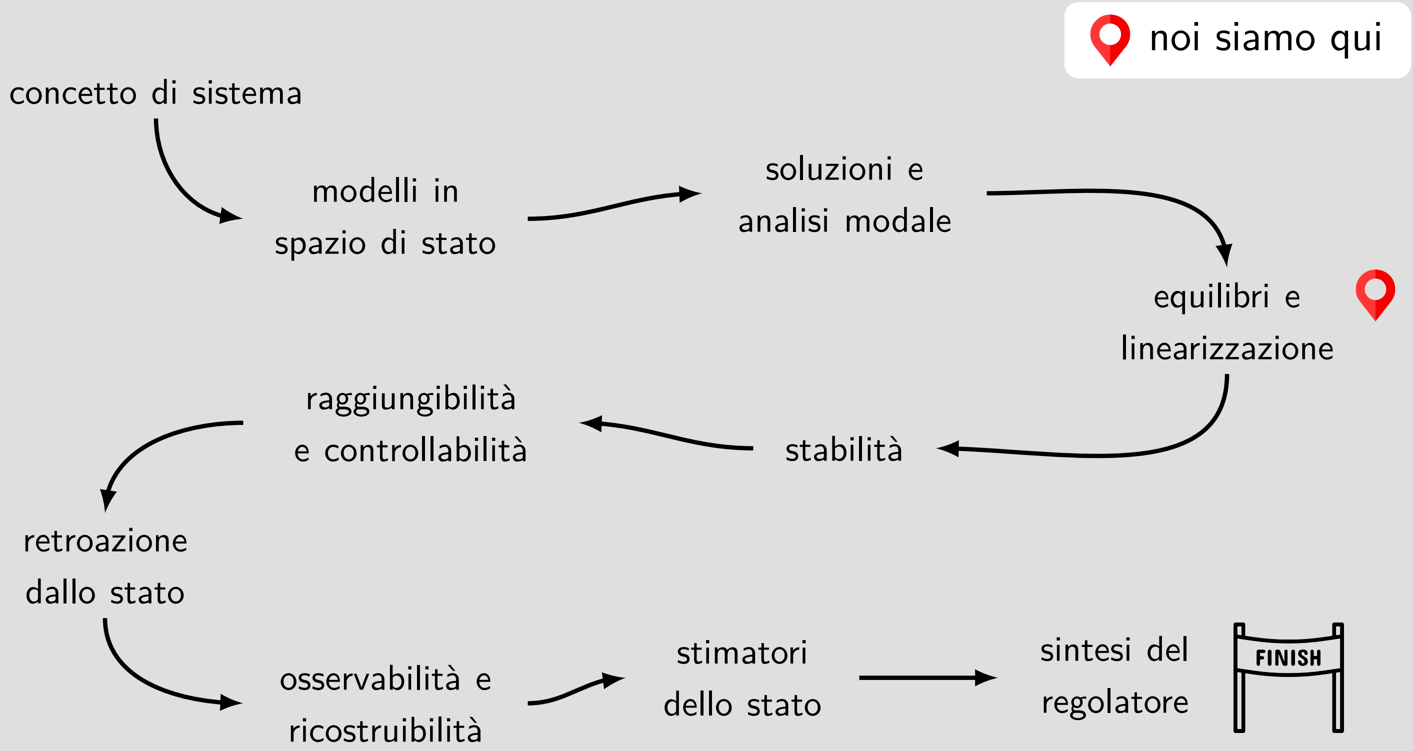
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 9: Equilibri e stabilità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

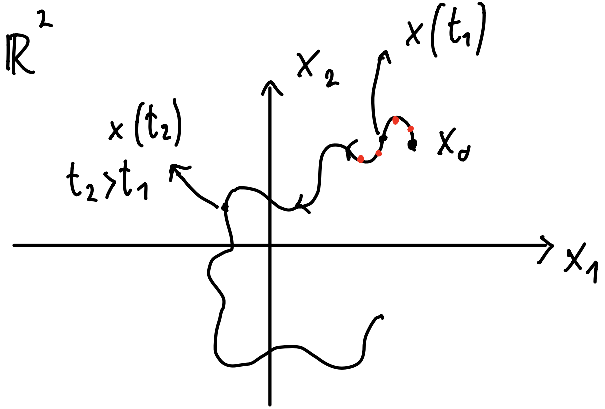
Traiettorie di stato e ritratto di fase

non lineare

$x(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)}$$



Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$: $\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$

Ritratto di fase del sistema $=$ insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 1$

$f \in \mathbb{R}$

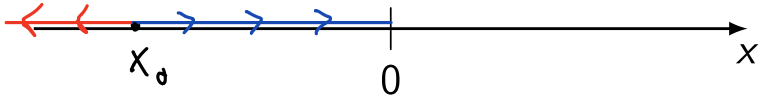
$\dot{x}(t) = fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$f > 0$

$f < 0$

$f \in \mathbb{R}$, $f = 0$



$x(t) = e^{ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = f^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ o $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$\dot{x}(t) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t)$, $t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$x(t) = e^{\lambda_1 t} w_1 + e^{\lambda_2 t} w_2$

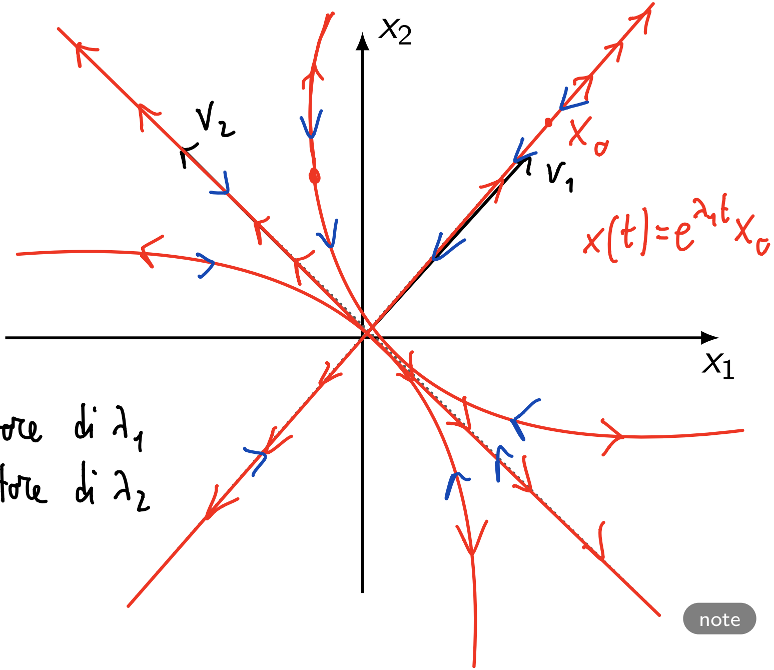
$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori λ_1, λ_2

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

v_1 autovettore di λ_1

v_2 autovettore di λ_2



note

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

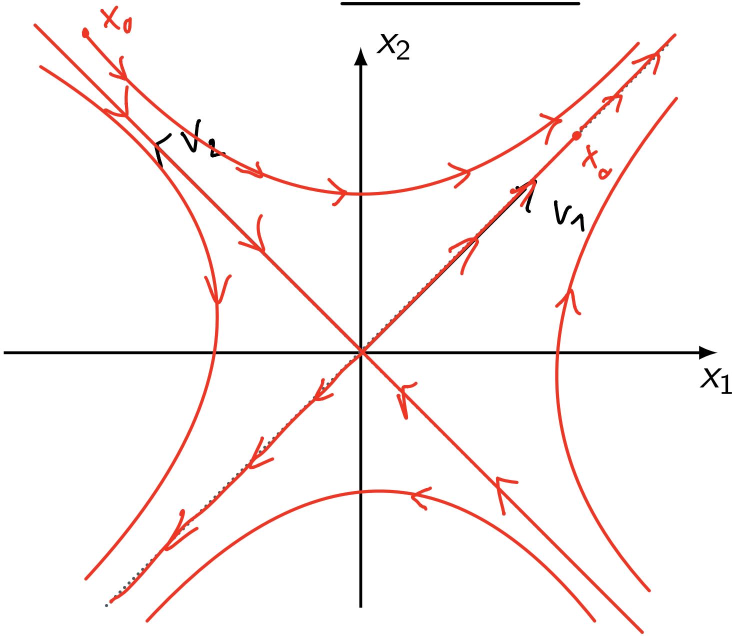
$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \underline{\lambda_1 > 0 > \lambda_2}$



Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1 = \sigma + i\omega \quad \lambda_2 = \sigma - i\omega$

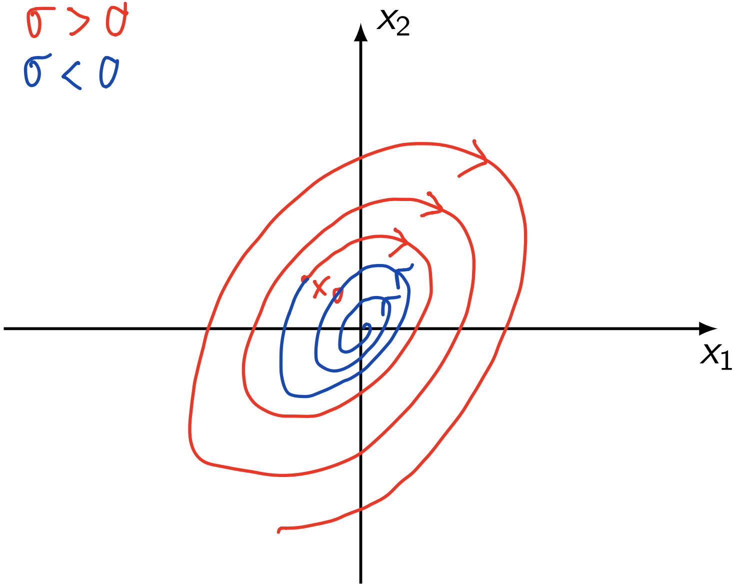
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (complessi coniugati)

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$\sigma > 0$

$\sigma < 0$



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

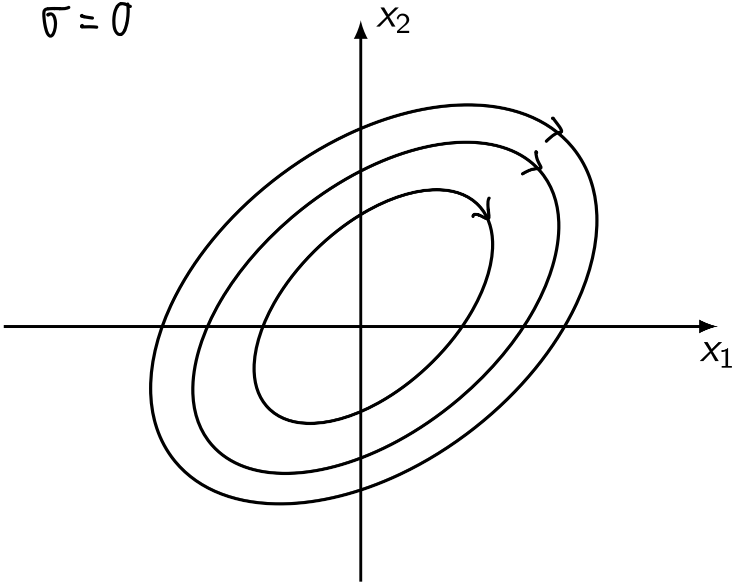
Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: $n = 2$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ (complessi coniugati)

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$\sigma = 0$



$F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$

$x(t) = e^{Ft}x_0$ (t.c.)

$x(t) = F^t x_0$ (t.d.)

Traiettorie di stato e ritratto di fase di sistemi lineari: n generico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n}, \text{ autovalori } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

$\dot{x}(t) = Fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.) $x(t) = e^{Ft}x_0$

$x(t+1) = Fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.) $x(t) = F^t x_0$

Fatto generale: Una traiettoria $x(t)$ giace su una retta passante per l'origine se e solo se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è autovettore di F relativo ad un autovalore reale.

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Punti di equilibrio

$x_0 = \bar{x}$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$x(t) = \bar{x} \ \forall t \Rightarrow 0 = f(\bar{x})$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)}$$

$x(t) = \bar{x} \ \forall t \Rightarrow \bar{x} = f(\bar{x})$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Punti di equilibrio

$\dot{x}(t) = Fx(t)$ $\qquad$ $F\bar{x} = 0$

$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$ $\qquad$ (t.c.) $\qquad$ $\bar{x}$ equilibrio $\iff f(\bar{x}) = 0$

$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+$ $\qquad$ (t.d.) $\qquad$ $\bar{x}$ equilibrio $\iff \bar{x} = f(\bar{x})$

$x(t+1) = F\,x(t)$ $\qquad$ $\bar{x} = F\bar{x} \Rightarrow (I-F)\bar{x} = 0$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

$F\bar{x} = 0$

Caso lineare: $\bar{x}$ equilibrio $\iff$ $\bar{x} \in \ker F$ (t.c.)

$\bar{x} \in \ker(F - I)$ (t.d.)

$(F - I)\bar{x} = 0$

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}: \ \bar{x}(1-\bar{x}) = 0 \ \begin{cases} \bar{x}=0 \\ \bar{x}=1 \end{cases}$ 2 punti di equilibrio

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}: \ \bar{x}^2 + 1 = 0 \Rightarrow \bar{x}^2 = -1$ $\nexists$ equilibri

3. $\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^{F} x \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} : \ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases} \ \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1 eq.

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} : \ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ \begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \ \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \ \alpha \in \mathbb{R}$

∞ equilibri

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \quad \Longrightarrow \quad$ due equilibri: $\bar{x} = 0, 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \quad \Longrightarrow \quad$ unico equilibrio: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad \Longrightarrow \quad$ infiniti equilibri: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante},\ u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

$\bar{x}$ equilibrio $\iff$

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \qquad F\bar{x} + G\bar{u} = 0 \qquad \text{(t.c.)}$$

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \qquad \bar{x} = F\bar{x} + G\bar{u} \qquad \text{(t.d.)}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante},\ u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

caso lineare

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{array}{lll} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 & F\bar{x} = -G\bar{u} & \text{(t.c.)} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) & (F - I)\bar{x} = -G\bar{u} & \text{(t.d.)} \end{array}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \underline{\bar{u} \neq 0} \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R} : \quad 0 = \bar{u} \quad \nexists$ equilibri

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \bar{u}$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \bar{x}_2 = \bar{u} \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

note

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \qquad \Longrightarrow \qquad$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases} \qquad \Longrightarrow$

nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$

un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$

due equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

note

In questa lezione

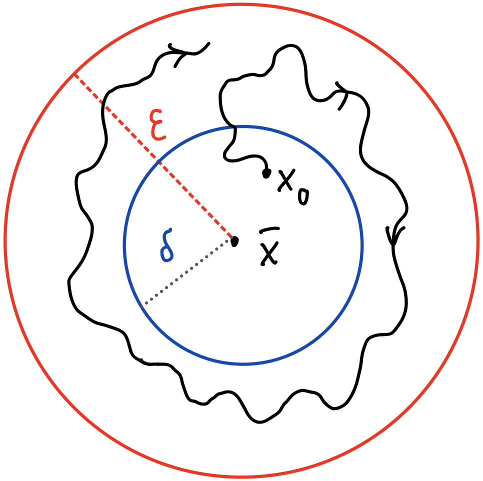
- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Stabilità semplice (alla Lyapunov)

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto semplicemente stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che

norma vettoriale

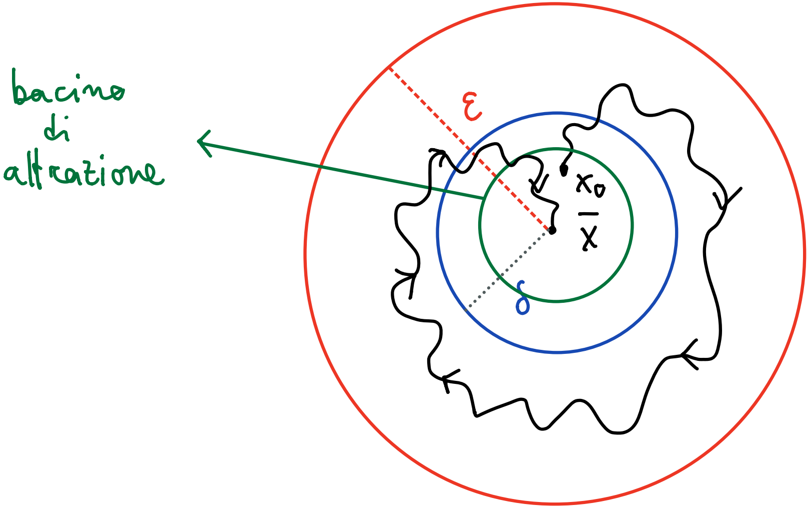
$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$



Stabilità asintotica

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$. (attrattività convergenza)



convergenza $\not\Rightarrow$ stabilità semplice

② $\not\Rightarrow$ ①

note

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se le condizioni valgono per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si ha stabilità ~~semplice~~/asintotica globale.

Def: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è globalmente asintoticamente stabile (GAS) se

1) $\bar{x}$ è semplicemente stabile

2) $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se le condizioni valgono per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si ha stabilità semplice/asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un cambio di variabile, si può portare l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

$\dot{x}(t) = Fx(t) \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \qquad \bar{x} \neq 0$

$z(t) = x(t) - \bar{x}$

$x(t) = z(t) + \bar{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{z}(t) = F(z(t) + \bar{x}) = Fz(t) + \overbrace{F\bar{x}}^{=0}$

$\dot{z}(t) = Fz(t)$

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale. Se le condizioni valgono per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si ha stabilità semplice/asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un cambio di variabile, si può portare l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

3. Per sistemi lineari stabilità (asintotica) locale = stabilità (asintotica) globale. Inoltre:

stabilità semplice	$\Longleftrightarrow$	e^{Ft} limitata	(t.c.)
		F^t limitata	(t.d.)
stabilità asintotica	$\Longleftrightarrow$	e^{Ft} convergente	(t.c.)
		F^t convergente	(t.d.)

$\mathrm{Re}[\lambda_i] < 0$ F Hurwitz

$|\lambda_i| < 1$ F Schur

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots \\ &\approx \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{f(\bar{x})} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) \end{aligned}$$

$z = x - \bar{x}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots \\ &\approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})(x - \bar{x}) \end{aligned}$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\, z, \quad z \triangleq x - \bar{x}}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = \underset{\uparrow}{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Jacobiano di f valutato in x

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots, \qquad J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

Jacobiano di f valutato in x

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots, \qquad J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

F

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{z} = J_f(\bar{x})\, z, \quad z \triangleq x - \bar{x}}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\qquad \begin{aligned} \bar{x} &= 0 \\ \bar{x} &= \pi \end{aligned}$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

note

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad$ $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\dot{x} = x$, $\quad \dot{z} = -z,\ z \triangleq x - \pi$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

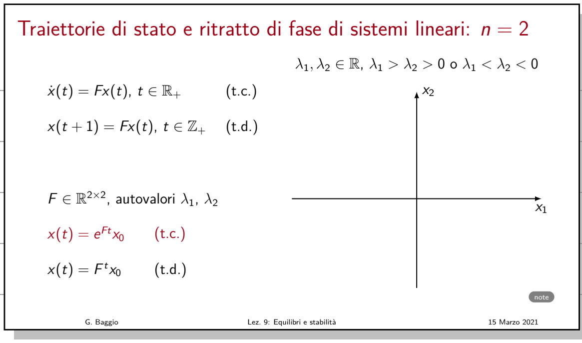
Lez. 9: Equilibri e stabilità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io



$$\dot{x}(t) = F\,x(t) \qquad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad x(0) = x_0$$

F ha autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$

<u>Proprietà</u>: Se x_0 è un autovettore di F relativo ad un autovalore λ_i:

$$x(t) = e^{\lambda_i t} x_0$$

Se x_0 è autovettore di F relativo a λ_i:

$$F x_0 = \lambda_i x_0$$

$$F^2 x_0 = F\cdot(F x_0) = \lambda_i F x_0 = \lambda_i^2 x_0$$

$$\vdots$$

$$F^k x_0 = \lambda_i^k x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k\right) x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\left(F^k x_0\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_i^k\right) x_0 = e^{\lambda_i t} x_0$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0$

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

note

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \text{ è equilibrio } \iff \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 + \bar{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad '' \\ \bar{x}_1 = \bar{x}_1^2 + \bar{u} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + \bar{u} = 0$$

$$\bar{x}_1^{(1,2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2}$$

1) $1 - 4\bar{u} > 0$: $\quad \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 + \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix} \quad \bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$

$\bar{u} < 1/4$

2) $1 - 4\bar{u} = 0$: $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$\bar{u} = 1/4$

3) $1 - 4\bar{u} < 0$: $\quad \nexists$ equilibri

$\bar{u} > 1/4$

Stabilità asintotica

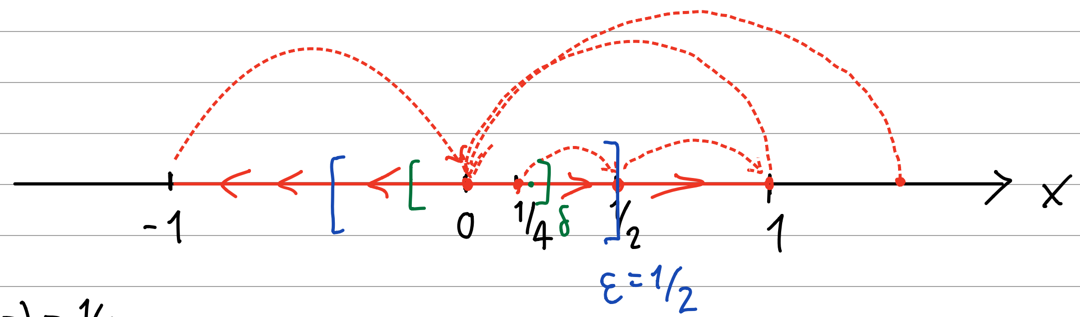
Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.

note

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & |x(t)| < 1 \\ 0 & |x(t)| \geq 1 \end{cases}$$

$\bar{x} = 0$ è equilibrio



$x(0) = 1/4$
$x(1) = 1/2$
$x(2) = 1$
$x(3) = 0$

$\bar{x}$ è convergente
ma non semplicemente stabile

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad \bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$

2. $\dot{x} = \alpha x^3$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

note

1) $\dot{x} = \sin x$, $\quad \bar{x} \in \mathbb{R}$ eq. $\iff \sin \bar{x} = 0$, $\quad \bar{x} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\bar{x} = 0$: $\quad \dot{x} = \cos(0)\, x = x$

$\bar{x} = \pi$: $\quad \dot{z} = \cos(\pi)\, z = -z$

2) $\dot{x} = \alpha x^3$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $\quad \bar{x} = 0$ eq.

Sistema linearizzato: $\quad \dot{x} = 0$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x = \bar{x}} = \begin{bmatrix} x_2^2 & -1 + 2x_1 x_2 \\ 1 & 5x_2^4 \end{bmatrix}_{x = \bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema linearizzato: $\quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$