Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 8: Esercizi di ricapitolazione Parte I

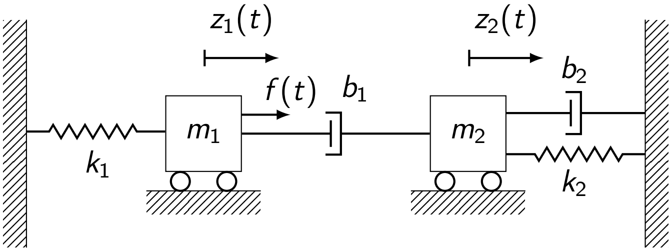
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

In questa lezione

- Esercizio 1: modelli in spazio di stato
- Esercizio 2: forma di Jordan e analisi modale a t.c.
- Esercizio 3: analisi modale ed evoluzione libera a t.c.
- Esercizio 4: analisi modale ed evoluzione forzata a t.d.

Esercizio 1



Rappresentazione interna o di stato con $u(t) = f(t)$ e $y(t) = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^\top$?

Esercizio 1: soluzione

Variabili: $x(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix}$, $u(t) = f(t)$, $y(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$

Matrici: $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ 0 & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $J = 0$

Esercizio 2 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 1 Febbraio 2012]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha & \alpha - 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 - \alpha^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Forma di Jordan F_J e i modi del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Funzione di trasferimento $W(s)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esercizio 2: soluzione

1. $$F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \alpha = 1, \text{ modi: } e^{t}, te^{t}, e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \alpha = 2, \text{ modi: } e^{-2t}, te^{-2t}, e^{2t} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \alpha = -2, \text{ modi: } e^{-2t}, te^{-2t}, \frac{t^2}{2}e^{-2t} \\ \begin{bmatrix} 2-\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \alpha \neq 1, 2, -2, \text{ modi: } e^{(2-\alpha^2)t}, e^{\alpha t}, e^{-2t} \end{cases}$$

2. $$W(s) = \frac{(3-5\alpha)-s}{(s-\alpha)(s+2)}$$

Esercizio 3

$$\dot{x}(t) = Fx(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Per $\alpha = \beta = 1$, $x(0) \neq 0$ tali che $y(t)$ non è divergente?

2. Per $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, $x(0) \neq 0$ tali che $y(t)$ è limitata?

Esercizio 3: soluzione

1. $x(0) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\gamma \in \mathbb{R}$

2. $x(0) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$

Esercizio 4 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 24 Giugno 2019]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

1. Modi del sistema e loro carattere?
2. Matrice di trasferimento $W(z)$?
3. Evoluzione del sistema per $x(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = \delta(t),\ t \geq 0$?

Esercizio 4: soluzione

1. $(-3)^t, 2^t$, entrambi divergenti

2. $W(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z+3)(z-2)} \\ \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}$

3. $y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}2^t + \frac{1}{6}(-3)^t - \frac{1}{6}\delta(t) \\ \frac{1}{2}2^t - \frac{1}{2}\delta(t) \end{bmatrix}, \ t \geq 0$