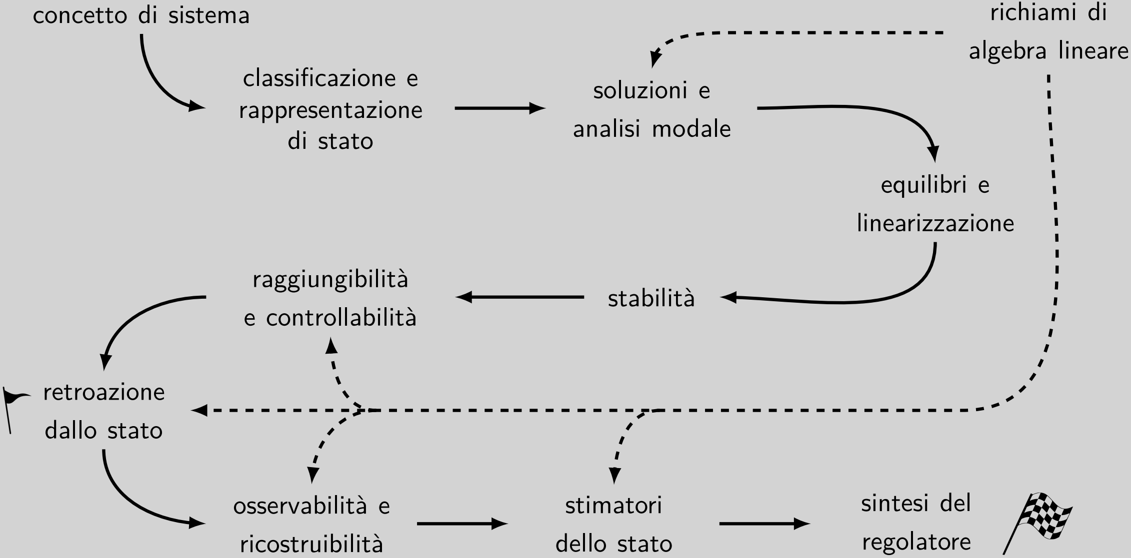
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

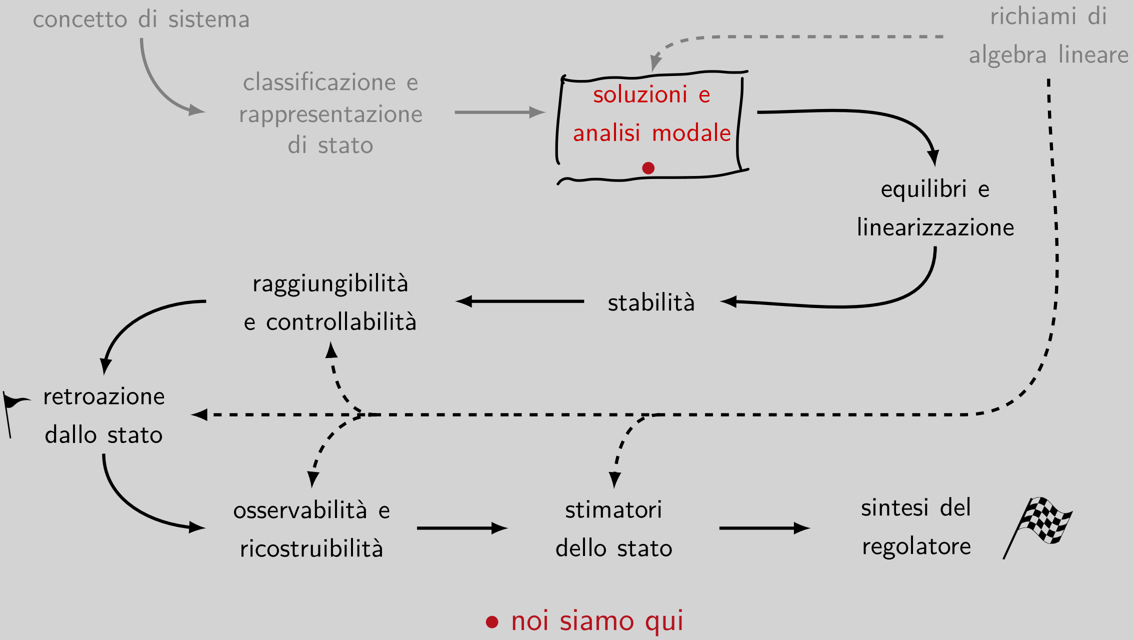
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 7: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo discreto)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
• noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
  - Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
    - Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
      - Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
        - Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

In questa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto

▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto

▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto

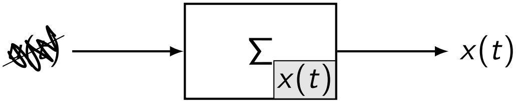
[▷ Quiz time !]

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Quiz time !

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?

extra



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

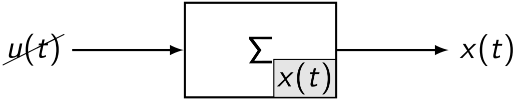
$$x(t+1) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = ??$$

$$x(1) = F x_0$$
$$x(2) = F x(1) = F^2 x_0$$
$$x(3) = F x(2) = F^3 x_0$$
$$\vdots$$
$$x(t) = F^t x_0$$

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?

extra



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$\boxed{x(t) = F^t x_0}$$

Usiamo Jordan!

$F_J = T^{-1} F T$

1. $F = T F_J T^{-1} \quad \Longrightarrow \quad F^t = T F_J^t T^{-1}$

Usiamo Jordan!

1. $F = TF_J T^{-1} \implies F^t = TF_J^t T^{-1}$

2. $F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \implies F_J^t = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k}^t \end{array}\right]$

Usiamo Jordan!

1. $F = TF_J T^{-1} \implies F^t = TF_J^t T^{-1}$

2. $$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \implies F_J^t = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k}^t \end{array}\right]$$

3. $$J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{array}\right] \implies J_{\lambda_i}^t = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i}^t \end{array}\right]$$

Usiamo Jordan!

extra

quasi-diagonale

$$\textbf{4.}\ J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \overset{\lambda_i \neq 0}{\Longrightarrow} J^t_{\lambda_i,j} = (\lambda_i I + N)^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usiamo Jordan!

extra

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}}$ $\boxed{\lambda_i \neq 0}$ $\Longrightarrow J^t_{\lambda_i,j} = (\lambda_i I + N)^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow J^t_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} & \cdots & \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t \end{bmatrix}$$

Usiamo Jordan!

extra

$$\textbf{4.}\ J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \overset{\lambda_i = 0}{\Longrightarrow} J_{\lambda_i,j}^t = N^t, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usiamo Jordan!

extra

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \overset{\lambda_i = 0}{\Longrightarrow} J_{\lambda_i,j}^t = N^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

delta di Kronecker o discreto

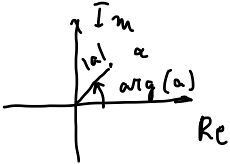
$$\Longrightarrow J_{\lambda_i,j}^t = \begin{bmatrix} \delta(t) & \delta(t-1) & \delta(t-2) & \cdots & \delta(t-r_{ij}+1) \\ 0 & \delta(t) & \delta(t-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta(t) \end{bmatrix}$$

Modi elementari

$$\left.\begin{array}{l} \binom{t}{0}\lambda_i^t,\ \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1},\ \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2},\ \dots,\ \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ \delta(t),\ \delta(t-1),\ \delta(t-2),\ \dots,\ \delta(t-r_{ij}+1) \end{array}\right\} = \text{Modi elementari del sistema}$$

Modi elementari

$a \in \mathbb{C}$



$$\binom{t}{0}\lambda_i^t,\ \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1},\ \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2},\ \dots,\ \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1}$$

$$\delta(t),\ \delta(t-1),\ \delta(t-2),\ \dots,\ \delta(t-r_{ij}+1)$$

$=$ Modi elementari del sistema

$$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!(t-k)!} = \frac{t(t-1)\cdots(t-(k+1))\cancel{(t-k)!}}{k!\,\cancel{(t-k)!}} = \alpha_k t^k + \dots + \alpha_1 t$$

1. $\lambda_i \neq 0$: $\binom{t}{k}\lambda_i^{t-k} \sim \boxed{t^k\lambda_i^t} = t^k e^{t(\ln \lambda_i)}$ $\quad$ ($\ln(\cdot)$ = logaritmo naturale complesso)

$\lambda_i > 0 \qquad t^k \lambda_i^t = t^k \left(e^{\ln \lambda_i}\right)^t = t^k e^{t \ln \lambda_i}$

$\lambda_i \in \mathbb{C} \qquad t^k \lambda_i^t = t^k e^{t \ln \lambda_i} \qquad \ln \lambda_i \triangleq \ln|\lambda_i| + i \arg(\lambda_i)$

$\lambda_i < 0 \qquad \arg(\lambda_i) = \pi$

Modi elementari

$$\left.\begin{array}{l}\binom{t}{0}\lambda_i^t,\ \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1},\ \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2},\ \dots,\ \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ \delta(t),\ \delta(t-1),\ \delta(t-2),\ \dots,\ \delta(t-r_{ij}+1)\end{array}\right. = \text{Modi elementari del sistema}$$

1. $\lambda_i \neq 0$: $\binom{t}{k}\lambda_i^{t-k} \sim t^k \lambda_i^t = t^k e^{t(\ln \lambda_i)}$ $\quad$ ($\ln(\cdot)$ = logaritmo naturale complesso)

2. $\lambda_i = 0$: modi elementari si annullano dopo un numero finito di passi !

Non esiste una controparte modale a tempo continuo !!

Evoluzione libera

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$y(t) = y_\ell(t) = HF^t x_0 = \sum_{i,j} t^j \lambda_i^t v_{ij} + \sum_j \delta(t-j) w_j$$

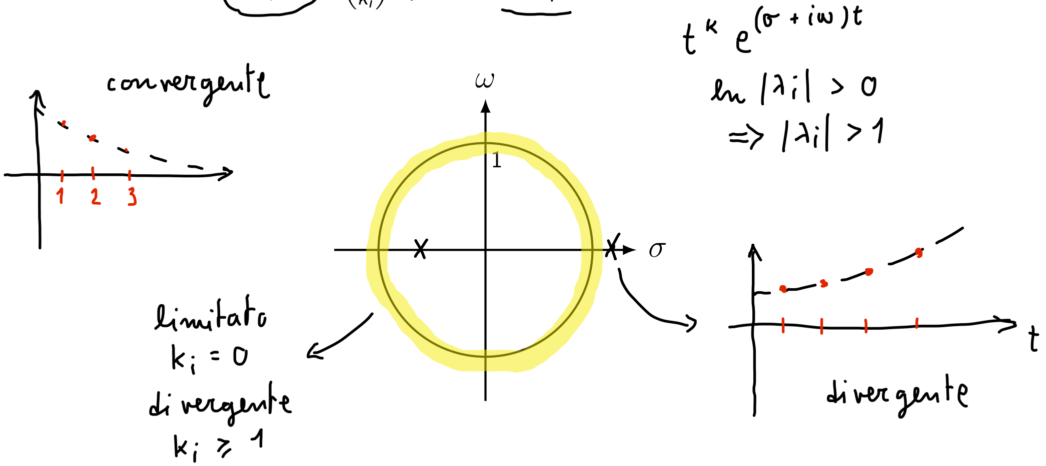
$$= \text{combinazione lineare dei modi elementari}$$

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Quiz time !

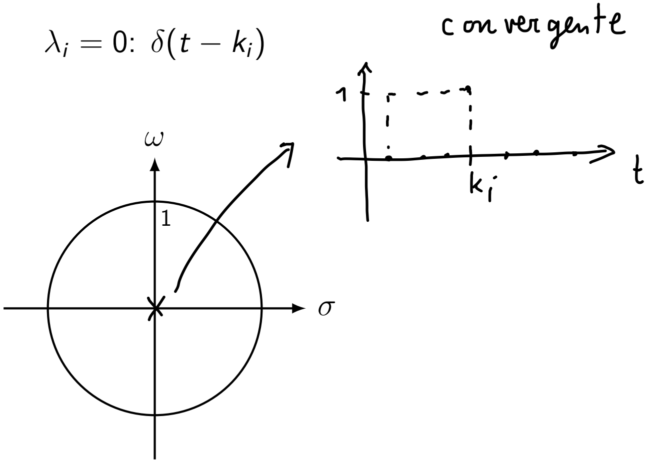
Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \neq 0: \binom{t}{k_i}\lambda_i^{t-k_i} \sim t^{k_i}\lambda_i^t = t^{k_i}e^{t(\ln \lambda_i)} = t^{k_i}e^{t(\ln|\lambda_i| + i\arg(\lambda_i))}$$



Carattere dei modi elementari

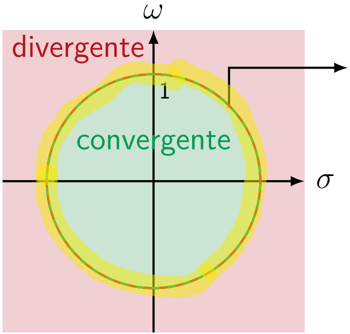
$$\lambda_i = 0\text{: } \delta(t - k_i)$$



Carattere dei modi elementari

modo associato a $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$

$k_i = 0 \quad \nu_i = g_i$



limitato o divergente

$k_i \geq 1$

$\nu_i > g_i$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

$\forall H, x_0$

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad F^t \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = HF^t x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$F^t = 0$ per t finito se $\lambda_i = 0$!

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \quad \iff \quad F^t \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = HF^t x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$F^t = 0$ per t finito se $\lambda_i = 0$!

$\forall H, x_0$

$$\begin{array}{c} |\lambda_i| \le 1, \ \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } |\lambda_i| = 1 \end{array} \quad \iff \quad F^t \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = HF^t x_0 \text{ limitata}$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad F^t \xrightarrow{t \to \infty} 0 \implies y(t) = HF^t x_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$F^t = 0$ per t finito se $\lambda_i = 0$!

$$\begin{array}{c} |\lambda_i| \leq 1, \ \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } |\lambda_i| = 1 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad F^t \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = HF^t x_0 \text{ limitata}$$

$$\begin{array}{c} \exists\, \lambda_i \text{ tale che } |\lambda_i| > 1 \\ \text{o } |\lambda_i| = 1 \text{ e } \nu_i > g_i \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad F^t \text{ non limitata} \Rightarrow y(t) = HF^t x_0 \text{ ?}$$

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Quiz time !

Evoluzione forzata

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

sovrapposizione degli effetti

↓

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = F^t x_0, \qquad x_f(t) \ ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = HF^t x_0, \qquad y_f(t) \ ??$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k)}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} G u(k) + Ju(t)}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = \text{ risposta impulsiva } = \begin{cases} J, & t = 0 \\ HF^t G, & t \geq 1 \end{cases}$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)}_{=x_f(t)} = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\mathcal{R}_t u_t}_{=x_f(t)} \qquad u_t \triangleq \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) + Ju(t)}_{=y_f(t)} = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{H\mathcal{R}_t u_t + Ju(t)}_{=y_f(t)}$$

$\mathcal{R}_t \triangleq \left[\; G \mid FG \mid F^2 G \mid \cdots \mid F^{t-1} G \;\right]$ = matrice di raggiungibilità in t passi

Evoluzione forzata (con trasformata Zeta)

extra

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z)$$

$$Y(z) = HX(z) + JU(z)$$

$$V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

Evoluzione forzata (con trasformata Zeta)

extra

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z)$$

$$Y(z) = HX(z) + JU(z)$$

$$V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

$$X(z) = \underbrace{z(zI - F)^{-1} x_0}_{= X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - F)^{-1} G}_{= X_f(z)}$$

$$Y(z) = \underbrace{Hz(zI - F)^{-1} x_0}_{= Y_\ell(z)} + \underbrace{[H(zI - F)^{-1} G + J] U(z)}_{= Y_f(z)}$$

Equivalenze dominio temporale/Zeta

1. $W(z) = \mathcal{Z}[w(t)] = H(zI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{Z}[F^t] = z(zI - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare F^t !!

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

$$W(z) = W_J(z) = H_J(zI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right]$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H_{\lambda_1,1}(zI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(zI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,\ell_k}(zI - J_{\lambda_k,\ell_k})^{-1}G_{\lambda_k,\ell_k} + J \\ &= W_{\lambda_1,1}(z) + W_{\lambda_1,2}(z) + \cdots + W_{\lambda_k,\ell_k}(z) + J \end{aligned}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(z) = \frac{A_1}{z-\lambda_i} + \frac{A_2}{(z-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(z-\lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(z)U(z) + JU(z)\right]$$

In questa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto

▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto

▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto

▷ Quiz time !

`www.kahoot.it`

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 7: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo discreto)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Usiamo Jordan!

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \overset{\lambda_i \neq 0}{\Longrightarrow} J^t_{\lambda_i,j} = (\lambda_i I + N)^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

back

$$J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I + N \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\lambda_i,j}^t \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Fatto: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se A e B commutano ($AB = BA$)

$$(A+B)^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} A^{t-k} B^k \qquad \text{(binomio di Newton)}$$

$$\binom{t}{k} = \frac{t!}{(t-k)!\,k!}$$

back

$\lambda_i I$, N commutano

$$J_{\lambda_{i,j}}^{\,t} = (\lambda_i I + N)^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (\lambda_i I)^{t-k} N^k$$

$$= \binom{t}{0} \lambda_i^t I + \left[\binom{t}{1} \lambda_i^{t-1} N + \binom{t}{2} \lambda_i^{t-2} N^2 + \dots \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} \\ & & & \binom{t}{0}\lambda_i^t \end{bmatrix}$$

$$* \to \binom{t}{\pi_{ij}-1} \lambda_i^{t-(\pi_{ij}-1)}$$

$$t \geq \pi_{ij} - 1$$

Usiamo Jordan!

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \overset{\lambda_i = 0}{\Longrightarrow} J^t_{\lambda_i,j} = N^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

back

$$J_{\lambda_{i,j}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = N$$

$$J_{\lambda_{i,j}}^t = N^t$$

$$N^0 = I \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad N^{r_{ij}-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^k \quad k \geq r_{ij} \qquad J_{\lambda_{i,j}}^k = 0$$

Evoluzione forzata

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = F^t x_0, \qquad x_f(t) \;??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = HF^t x_0, \qquad y_f(t) \;??$$

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$x(t)$, $y(t)$?

Per induzione:

$$x(1) = Fx_0 + Gu(0)$$

$$x(2) = Fx(1) + Gu(1) = F^2 x_0 + FGu(0) + Gu(1)$$

$$x(3) = Fx(2) + Gu(2) = F^3 x_0 + F^2 G u(0) + FGu(1) + Gu(2)$$

$\vdots$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G u(k)}_{x_f(t)} = F^t x_0 + R_t u_t$$

back

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-1-k} G u(k) + J u(t)}_{y_f(t)}$$

$$y_f(t) = [w * u](t)$$

$$u_t = \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$w(t) = \begin{cases} J & t = 0 \\ HF^t G & t \geq 1 \end{cases} = \text{risposta impulsiva}$$

$$R_t = [G \mid FG \mid \dots \mid F^{t-1} G] = \text{matrice di raggiungibilità in } t \text{ passi}$$

Evoluzione forzata (con trasformata Zeta)

extra

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z)$$

$$Y(z) = HX(z) + JU(z)$$

$$V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$V(z) = \mathcal{Z}[v(t)] \triangleq \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

Fatto: $\mathcal{Z}[v(t+1)] = zV(z) - zv(0)$

$$\begin{cases} zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z) \\ Y(z) = HX(z) + JU(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(z) = \underbrace{z(zI-F)^{-1}x_0}_{X_\ell(z)} + \underbrace{(zI-F)^{-1}GU(z)}_{X_f(z)} \\ Y(z) = \underbrace{Hz(zI-F)^{-1}x_0}_{} + \underbrace{H(zI-F)^{-1}GU(z) + JU(z)}_{} \end{cases}$$

$Y_\ell(z)$ $Y_f(z)$

back

1. $Y_f(z) = W(z)\,U(z)$ $W(z) = H\,(zI - F)^{-1} G + J$

$= \mathcal{Z}[w(t)] =$ matrice di trasf.

2. $X_\ell(z) = \mathcal{Z}[F^t x_0] = z\,(zI - F)^{-1} x_0$

$\Rightarrow \quad \mathcal{Z}[F^t] = z\,(zI - F)^{-1}$