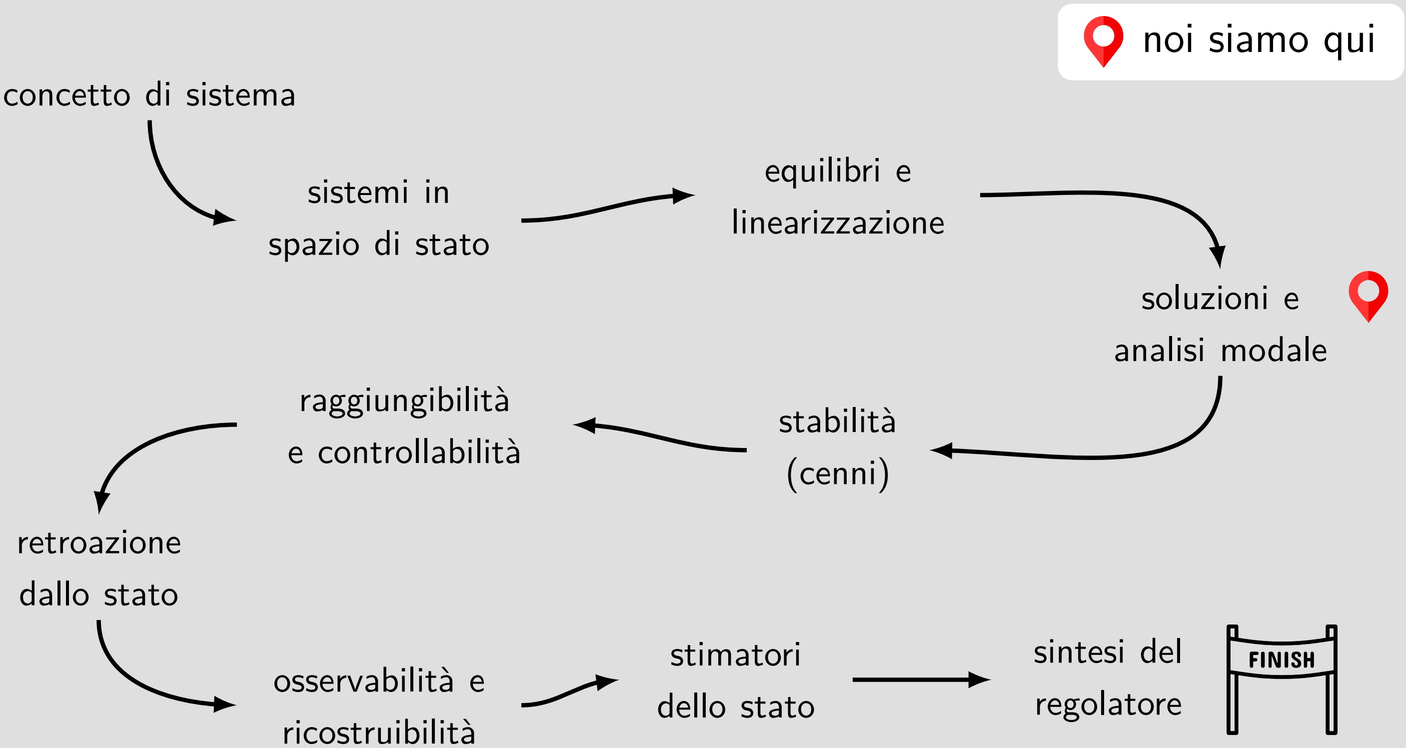
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 7: Soluzioni di sistemi lineari autonomi

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

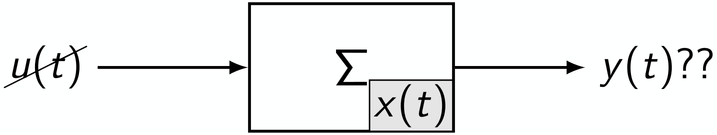
Nella scorsa lezione

- Altri fatti utili su matrici
- Forma canonica di Jordan
- Comandi Matlab®

In questa lezione

- ▷ Soluzioni di sistemi lineari autonomi a t.c.
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

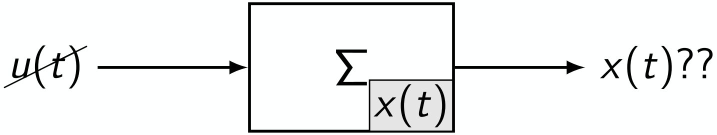
Soluzioni di un sistema LTI autonomo



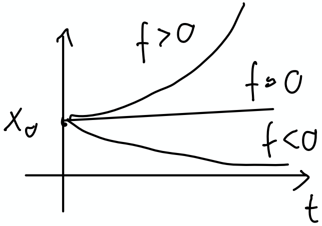
Σ lineare, tempo invariante e autonomo $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \equiv 0$

Tempo continuo: $\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso scalare



Caso scalare $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$



$$\dot{x}(t) = fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

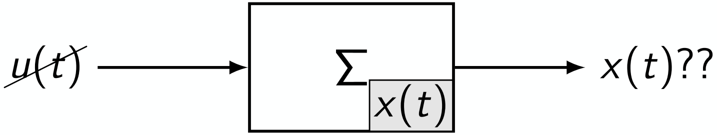
$$x(t) = ??$$

$x(t) = e^{ft} x_0$

$\downarrow$

$\dot{x}(t) = f e^{ft} x_0 = f x(t)$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso scalare



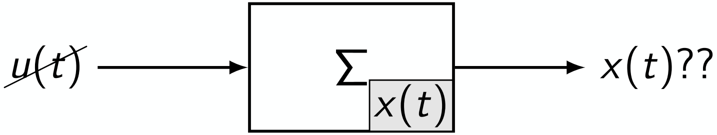
Caso scalare $\qquad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{f^kt^k}{k!} + \dots\right)x_0$$

$$e^{ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k t^k}{k!}$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale

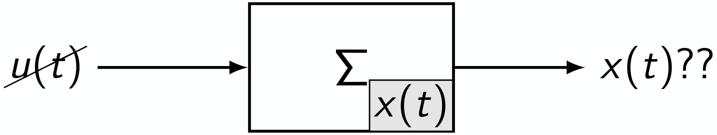


Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = ?? \quad e^{Ft} x_0$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

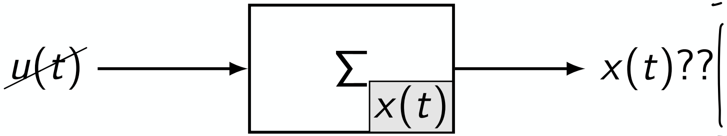
$$x(t) = e^{Ft}x_0 = ??$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale

x_0 Y

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} e^{Ft} x_0 = \frac{d}{dt}\left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2} + \frac{F^3t^3}{3!} + \dots\right)x_0 = \left(F + \frac{\cancel{2}F^2t}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3}F^3t^2}{\cancel{3}!\,2} + \dots\right)$$

$$= F\left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2!} + \dots\right)x_0 = F e^{Ft} x_0 = F x(t)$$



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2!} + \dots + \frac{F^kt^k}{k!} + \dots\right)x_0$$

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^kt^k}{k!}$$

In questa lezione

- ▷ Soluzioni di sistemi lineari autonomi a t.c.
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

Esponenziale di matrice e sue proprietà

Definizione: L'esponenziale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

note

Esponenziale di matrice e sue proprietà

Definizione: L'esponenziale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

(Alcune) proprietà:

1. $e^0 = I$ $\rightarrow$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\rightarrow$ A, B commutano
2. $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
3. $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile: $e^{TAT^{-1}} = Te^A T^{-1}$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A, \quad t \in \mathbb{R}$

note

In questa lezione

- Soluzioni di sistemi lineari autonomi a t.c.
- Esponenziale di matrice
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

note

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F\cdot F\cdots F}_{n \text{ volte}}\, t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

note

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

caso più in generale: F diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

note

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I,\ N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \ldots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\Longrightarrow \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

note

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

note

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $\quad e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I,\ N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \dots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\Longrightarrow \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

note

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $\quad e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

caso più in generale: F "quasi"-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

note

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I,\ F^1 = F,\ F^2 = -I,\ F^3 = -F,\ F^4 = I, \ldots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

note

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi "semplici" e/o "strutturati"...

....ma come fare in casi più complessi (F "piena" e senza "struttura")?

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi "semplici" e/o "strutturati"...

....ma come fare in casi più complessi (F "piena" e senza "struttura")?

$\boxed{\text{Strategia: Trasformare } F \text{ in una forma "semplice" (diagonale o quasi-diagonale)!}}$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 7: Soluzioni di sistemi lineari autonomi

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it
baggiogi.github.io

Esponenziale di matrice e sue proprietà

Definizione: L'esponenziale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

(Alcune) proprietà:

1. $e^0 = I$
2. $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
3. $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile: $e^{TAT^{-1}} = Te^AT^{-1}$
4. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A, \ \ t \in \mathbb{R}$

note

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$

i) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\alpha A, \beta A$ commutano $\implies e^{\alpha A + \beta A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$

ii) $\alpha = 1$, $\beta = -1 \longrightarrow e^{A-A} = e^A e^{-A} \longrightarrow e^A e^{-A} = I$

$$\underset{I\,=\,e^0}{e^{A-A}} \qquad \longrightarrow (e^A)^{-1} = e^{-A}$$

3) $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$e^{T^{-1}AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T^{-1}AT)^k}{k!} = I + T^{-1}AT + \frac{(T^{-1}AT)^2}{2!} + \frac{(T^{-1}AT)^3}{3!} + \dots$$

$$(T^{-1}AT)^2 = T^{-1}A\cancel{T}\cancel{T^{-1}}AT = T^{-1}A^2T$$

$$\vdots$$

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT$$

$$= I + T^{-1}AT + \frac{T^{-1}A^2T}{2!} + \frac{T^{-1}A^3T}{3!} + \dots$$

$$= T^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots\right)T$$

$$= T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)T = T^{-1}e^AT$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

note

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow e^{Ft}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \frac{t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

note

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

$IN = NI \longrightarrow N, I$ commutano

$$e^{Ft} = e^{(I+N)t} = e^{It} e^{Nt}$$

(proprietà 2 dell'esponenziale di matrici)

$$= \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k t^k}{k!} = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \frac{N^3 t^3}{3!} + \dots = I + Nt = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = N^2 \cdot N = 0 \longrightarrow N^k = 0 \quad \forall k \geq 2$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

note

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

$$NI = IN \longrightarrow e^{Ft} = e^{(I+N)t} = e^{It} e^{Nt}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k t^k}{k!} = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \frac{N^3 t^3}{3!} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = N^2 N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow N^k = 0 \qquad k \geq 3$$