Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 7: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo discreto)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in spazio di stato

soluzioni e analisi modale

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

FINISH

Nella scorsa lezione

$e^{\lambda_i t}, \; t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{\pi_{ij}-1} e^{\lambda_i t}$

modi distinti relativi λ_i: $\max_j \pi_{ij}$

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo

$Re[\lambda_i] < 0 \; \forall i$ convergenti

$Re[\lambda_i] \leq 0$ limitato

$Re[\lambda_i] = 0 \; \nu_i = g_i$

$\exists i \; Re[\lambda_i] > 0$ divergenti

o $Re[\lambda_i] = 0 \; \nu_i > g_i$

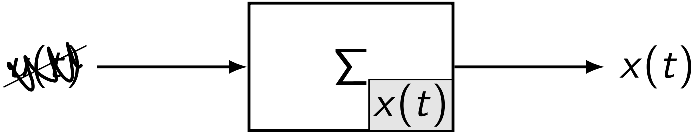
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1}$

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



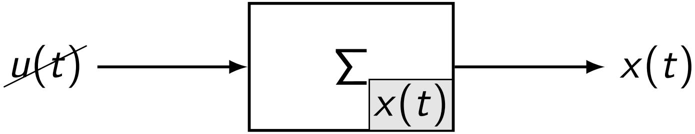
$x(1) = F x_0$
$x(2) = F x(1) = F^2 x_0$
$x(3) = F x(2) = F^3 x_0$
$\vdots$
$x(t) = F^t x_0$

Caso vettoriale $\underline{x(t) = y(t)} \in \mathbb{R}^n$

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = ??$$

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $\qquad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$\boxed{x(t) = F^t x_0}$$

Calcolo di F^t tramite Jordan

$F_J = T^{-1} F T$

1. $F = T F_J T^{-1} \quad \Longrightarrow \quad F^t = T F_J^t T^{-1}$

Calcolo di F^t tramite Jordan

1. $F = TF_J T^{-1} \quad \Longrightarrow \quad F^t = TF_J^t T^{-1}$

2. $F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad F_J^t = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k}^t \end{array}\right]$

Calcolo di F^t tramite Jordan

1. $F = TF_J T^{-1} \quad \Longrightarrow \quad F^t = TF_J^t T^{-1}$

2. $$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad F_J^t = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k}^t \end{array}\right]$$

3. $$J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad J_{\lambda_i}^t = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1}^t & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2}^t & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i}^t \end{array}\right]$$

Calcolo di F^t tramite Jordan

$$\lambda_i \neq 0$$

4(i). $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies J_{\lambda_i,j}^t = (\lambda_i I + N)^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

note

Calcolo di F^t tramite Jordan

$$\textbf{4(i).}\ J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \overset{\lambda_i \neq 0}{\Longrightarrow} J^t_{\lambda_i,j} = (\lambda_i I + N)^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{t}{1} = \frac{t!}{1!(t-1)!} = t$$

$$\Longrightarrow\ J^t_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} & \cdots & \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{t}{0}\lambda_i^t \end{bmatrix}$$

note

Calcolo di F^t tramite Jordan

$$\textbf{4(ii).}\ J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \overset{\lambda_i = 0}{\Longrightarrow} \underline{J_{\lambda_i,j}^t = N^t}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolo di F^t tramite Jordan

4(ii). $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \overset{\lambda_i = 0}{\Longrightarrow} J^t_{\lambda_i,j} = N^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

impulso discreto o di Kronecker

$$\Longrightarrow J^t_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \delta(t) & \delta(t-1) & \delta(t-2) & \cdots & \delta(t-r_{ij}+1) \\ 0 & \delta(t) & \delta(t-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta(t-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta(t) \end{bmatrix}$$

Modi elementari

$$\left.\begin{array}{l} \binom{t}{0}\lambda_i^t,\ \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1},\ \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2},\ \dots,\ \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ \delta(t),\ \delta(t-1),\ \delta(t-2),\ \dots,\ \delta(t-r_{ij}+1) \end{array}\right. = \text{Modi elementari del sistema}$$

Modi elementari

$$\left.\begin{array}{l}\binom{t}{0}\lambda_i^t,\ \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1},\ \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2},\ \dots,\ \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ \delta(t),\ \delta(t-1),\ \delta(t-2),\ \dots,\ \delta(t-r_{ij}+1)\end{array}\right\} = \text{Modi elementari del sistema}$$

$$\binom{t}{k} = \frac{t!}{k!\,(t-k)!} = \alpha_k t^k + \dots + \alpha_1 t$$

1. $\lambda_i \neq 0$: $\binom{t}{k}\lambda_i^{t-k} \sim \underline{t^k \lambda_i^t} = t^k e^{t(\ln \lambda_i)}$ $\quad$ ($\ln(\cdot)$ = logaritmo naturale complesso)

$\lambda_i \in \mathbb{C}$

$\hookrightarrow (e^{\ln \lambda_i})^t = e^{t \ln \lambda_i}$

$$\downarrow$$

$$\ln \lambda_i = \ln|\lambda_i| + i \arg(\lambda_i)$$

$$\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i = \rho_i e^{i\theta_i}$$

Modi elementari

$$\left.\begin{array}{l}\binom{t}{0}\lambda_i^t,\ \binom{t}{1}\lambda_i^{t-1},\ \binom{t}{2}\lambda_i^{t-2},\ \dots,\ \binom{t}{r_{ij}-1}\lambda_i^{t-r_{ij}+1} \\ \delta(t),\ \delta(t-1),\ \delta(t-2),\ \dots,\ \delta(t-r_{ij}+1)\end{array}\right. = \text{Modi elementari del sistema}$$

1. $\lambda_i \neq 0$: $\binom{t}{k}\lambda_i^{t-k} \sim t^k \lambda_i^t = t^k e^{t(\ln \lambda_i)}$ $\quad$ ($\ln(\cdot)$ = logaritmo naturale complesso)

2. $\lambda_i = 0$: modi elementari si annullano dopo un numero finito di passi !

$\boxed{\text{Non esiste una controparte modale a tempo continuo !!}}$

Evoluzione libera

$$x(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = HF^t x_0 = \sum_{i,j} t^j \lambda_i^t v_{ij} + \sum_j \delta(t-j) w_j$$

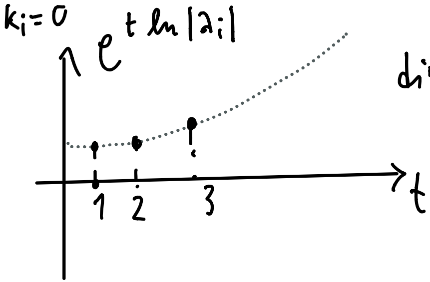
$$= \text{combinazione lineare dei modi elementari}$$

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto

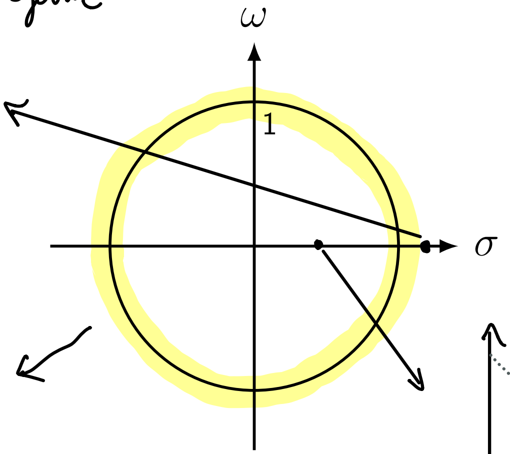
Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i \in \mathbb{C},\ \lambda_i \neq 0 : \binom{t}{k_i} \lambda_i^{t-k_i} \sim t^{k_i} \lambda_i^t = t^{k_i} e^{t(\ln \lambda_i)} = t^{k_i} e^{t(\ln|\lambda_i| + i\arg(\lambda_i))}$$



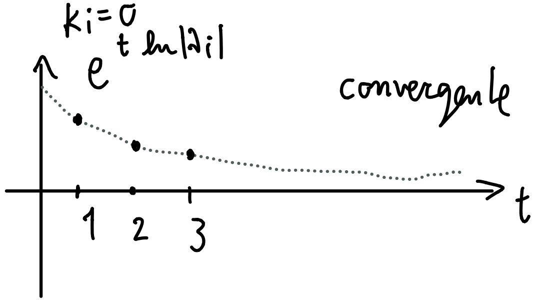
divergente

$\ln|\lambda_i| < 0$
$|\lambda_i| < 1$



1) $k_i = 0$
$\nu_i = g_i$: limitato

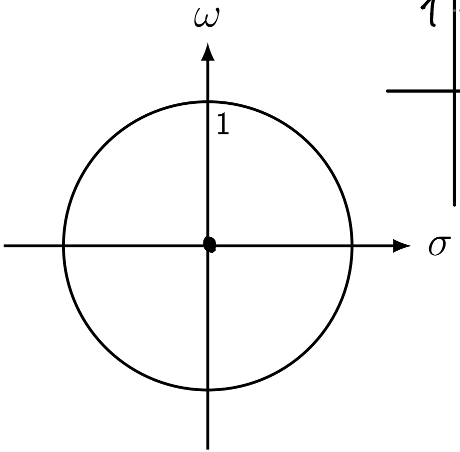
2) $k_i > 0$
$\nu_i > g_i$: divergente

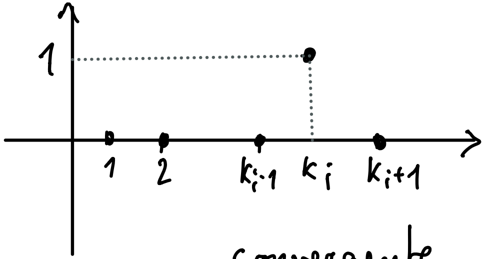


convergente

Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i = 0\colon\ \delta(t - k_i)$$

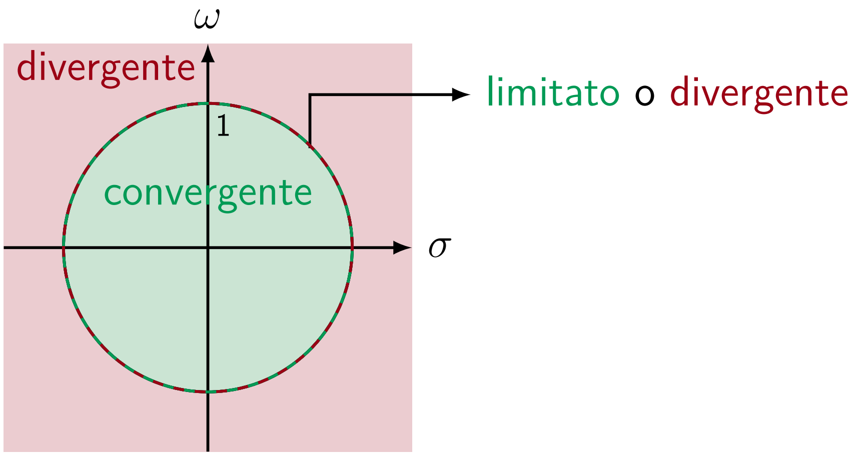




convergente
(in tempo finito)

Carattere dei modi elementari

modo associato a $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$



Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \qquad \iff \qquad F^t \xrightarrow{t \to \infty} 0 \implies y(t) = HF^t x_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$F^t = 0$ per t finito se $\lambda_i = 0$!!

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \qquad \Longleftrightarrow \qquad F^t \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = HF^t x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$F^t = 0$ per t finito se $\lambda_i = 0$!!

$$\begin{array}{c} |\lambda_i| \leq 1, \;\; \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } |\lambda_i| = 1 \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F^t \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = HF^t x_0 \text{ limitata}$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \quad \Longleftrightarrow \quad F^t \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = HF^t x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$F^t = 0$ per t finito se $\lambda_i = 0$!!

$$|\lambda_i| \leq 1, \ \forall i \text{ e } \nu_i = g_i \text{ se } |\lambda_i| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad F^t \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = HF^t x_0 \text{ limitata}$$

$$\exists\, \lambda_i \text{ tale che } |\lambda_i| > 1 \text{ o } |\lambda_i| = 1 \text{ e } \nu_i > g_i \quad \Longleftrightarrow \quad F^t \text{ non limitata} \Rightarrow y(t) = HF^t x_0 \ ?$$

divergente

dipende H, x_0

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo discreto
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo discreto

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = F^t x_0, \qquad x_f(t) \;??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = HF^t x_0, \qquad y_f(t) \;??$$

note

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} G u(k)}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} G u(k) + Ju(t)}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = \text{ risposta impulsiva } = \begin{cases} J, & t = 0 \\ HF^t G, & t \geq 1 \end{cases}$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-k-1} Gu(k)}_{=x_f(t)} = \underbrace{F^t x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\mathcal{R}_t u_t}_{=x_f(t)} \qquad u_t \triangleq \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-k-1} Gu(k) + Ju(t)}_{=y_f(t)} = \underbrace{HF^t x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{H\mathcal{R}_t u_t + Ju(t)}_{=y_f(t)}$$

$\mathcal{R}_t \triangleq \left[\; G \mid FG \mid F^2 G \mid \cdots \mid F^{t-1} G \;\right]$ = matrice di raggiungibilità in t passi

Evoluzione forzata (con trasformata Zeta)

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z)$$

$$Y(z) = HX(z) + JU(z)$$

$$V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

note

Evoluzione forzata (con trasformata Zeta)

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z)$$

$$Y(z) = HX(z) + JU(z)$$

$$V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

$$X(z) = \underbrace{z(zI - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(z)} + \underbrace{(zI - F)^{-1}G}_{=X_f(z)} U(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{Hz(zI - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(z)} + \underbrace{[H(zI - F)^{-1}G + J]U(z)}_{=Y_f(z)}$$

note

Equivalenze dominio temporale/Zeta

1. $W(z) = \mathcal{Z}[w(t)] = H(zI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{Z}[F^t] = z(zI - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare F^t !!

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z = T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, \, G_J = T^{-1}G, \, H_J = HT, \, J_J = J)$$

$$W(z) = W_J(z) = H_J(zI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right]$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} W(z) &= H_{\lambda_1,1}(zI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(zI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,g_k}(zI - J_{\lambda_k,g_k})^{-1}G_{\lambda_k,g_k} + J \\ &= W_{\lambda_1,1}(z) + W_{\lambda_1,2}(z) + \cdots + W_{\lambda_k,g_k}(z) + J \end{aligned}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(z) = \frac{A_1}{z-\lambda_i} + \frac{A_2}{(z-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(z-\lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(z)U(z) + JU(z)\right]$$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 7: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata
(tempo discreto)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Calcolo di F^t tramite Jordan

4(i). $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \overset{\lambda_i \neq 0}{\Longrightarrow} J^t_{\lambda_i,j} = (\lambda_i I + N)^t, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

note

$$J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{N}$$

Proposizione: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $AB = BA$, allora

$$(A+B)^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} A^{t-k} B^k$$

$$J_{\lambda_i,j}^t = (\lambda_i I + N)^t = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (\lambda_i I)^{t-k} N^k \qquad (t > r_{ij}-1)$$

$\lambda_i I, N$ commutano

$$= \binom{t}{0} \lambda_i^t \underbrace{N^0}_{= I} + \binom{t}{1} \lambda_i^{t-1} N + \binom{t}{2} \lambda_i^{t-2} N^2 + \cdots + \binom{t}{r_{ij}-1} \lambda_i^{t-r_{ij}-1} N^{r_{ij}-1}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad N^{r_{ij}-1} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 & 1 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Evoluzione forzata

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = F^t x_0, \qquad x_f(t) \text{ ??}$$
$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = HF^t x_0, \qquad y_f(t) \text{ ??}$$

note

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$

$$x(1) = Fx(0) + Gu(0)$$

$$x(2) = Fx(1) + Gu(1) = F(Fx(0) + Gu(0)) + Gu(1) = F^2x(0) + FGu(0) + Gu(1)$$

$$x(3) = Fx(2) + Gu(2) = F(F^2x(0) + FGu(0) + Gu(1)) + Gu(2) = F^3x(0) + F^2Gu(0) + FGu(1) + Gu(2)$$

$$\vdots$$

$$x(t) = F^t x(0) + F^{t-1}Gu(0) + F^{t-2}Gu(1) + \dots + Gu(t-1) = \underbrace{F^t x(0)}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} F^{t-1-k} G u(k)}_{x_f(t)} = F^t x(0) + \underbrace{\begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix}}_{R_t} \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

R_t matrice di raggiungibilità in t passi

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t) = \underbrace{HF^t x(0)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{t-1} HF^{t-1-k} G u(k) + Ju(t)}_{y_f(t)}$$

$$w(t) = \begin{cases} HF^tG & t \geq 1 \\ J & t = 0 \end{cases}$$ risposta impulsiva

$$y_f(t) = [w * u](t)$$

$\uparrow$ convoluzione discreta

Evoluzione forzata (con trasformata Zeta)

$$zX(z) - zx_0 = FX(z) + GU(z)$$

$$Y(z) = HX(z) + JU(z)$$

$$V(z) \triangleq \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

G. Baggio — Lez. 7: Modi, risposta libera e forzata (t.d.) — 11 Marzo 2021

$$\begin{cases} x(t+1) = F x(t) + G u(t) \\ y(t) = H x(t) + J u(t) \end{cases}$$

Trasformata Zeta:

$$V(z) = \mathcal{Z}[v(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} v(t) z^{-t}$$

$$\mathcal{Z}[v(t+1)] = z V(z) - z v(0)$$

$$\begin{cases} x(t+1) = F x(t) + G u(t) \\ y(t) = H x(t) + J u(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{Z}} \begin{cases} z X(z) - z x(0) = F X(z) + G U(z) \\ Y(z) = H X(z) + J U(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(z) = z(zI-F)^{-1} x(0) + (zI-F)^{-1} G U(z) \\ Y(z) = zH(zI-F)^{-1} x(0) + [H(zI-F)^{-1} G + J] U(z) \end{cases}$$

$(x(0)=0)$

1) $W(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = H(zI-F)^{-1}G + J$ Matrice di trasferimento

2) $\mathcal{Z}[x_\ell(t)] = \mathcal{Z}[F^t x(0)] = \mathcal{Z}[F^t] x(0) = z(zI-F)^{-1} x(0)$

$$\boxed{z(zI-F)^{-1} = \mathcal{Z}[F^t]}$$