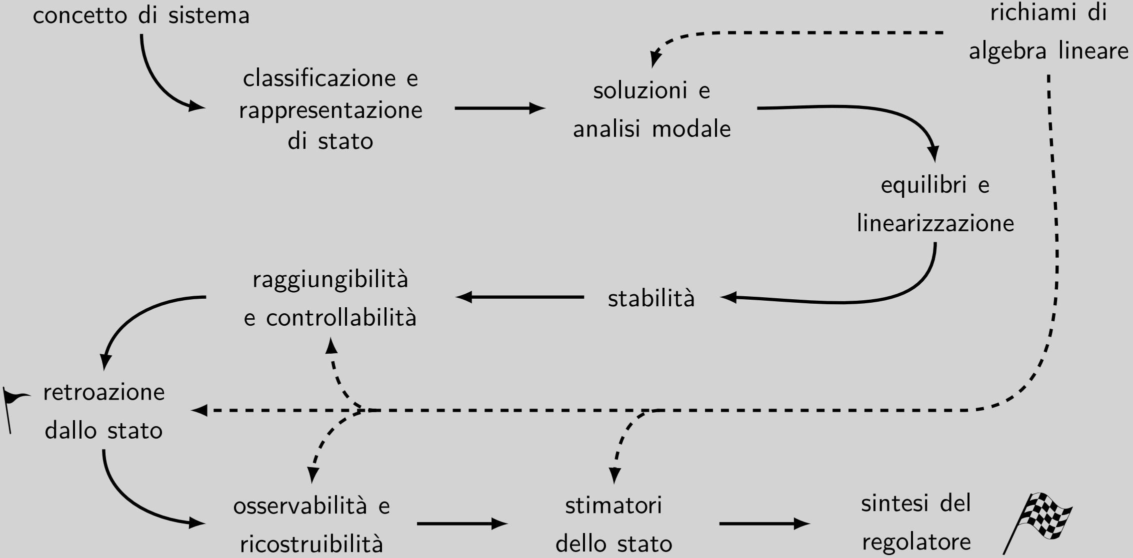
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

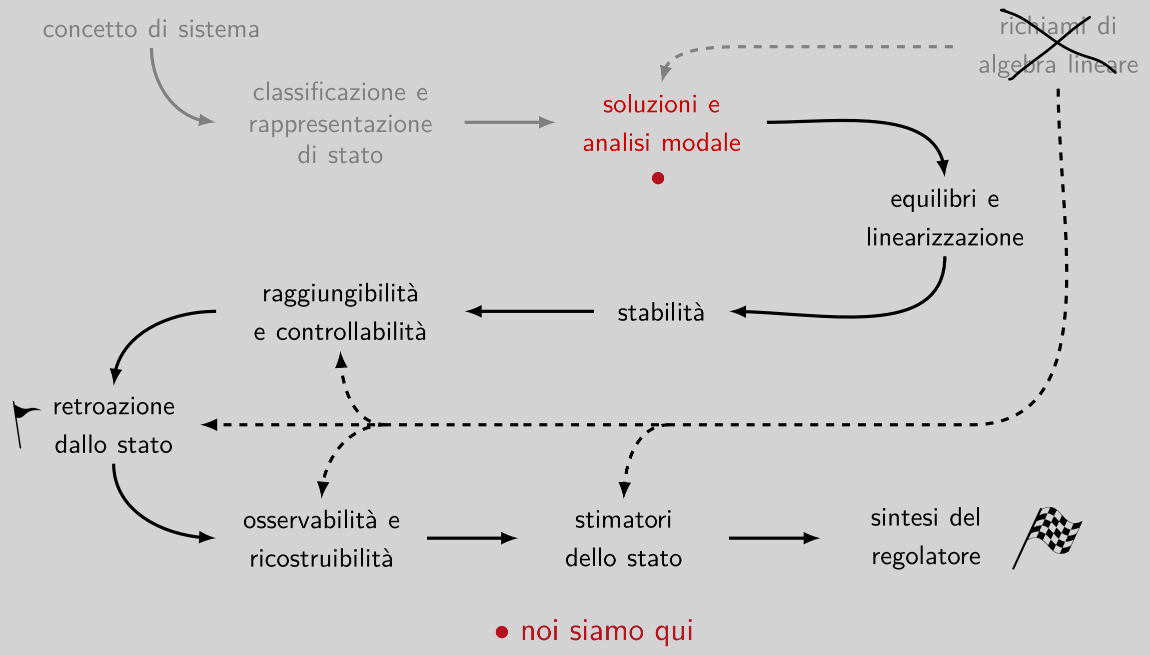
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
~~richiami di algebra lineare~~
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
• noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- Forma canonica di Jordan: costruzione
- Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- Forma canonica di Jordan: osservazioni
- Polinomi annullatori e polinomio minimo

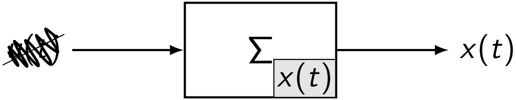
In questa lezione

- Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
  - Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
    - Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
      - Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
        - Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
- ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0$$

Usiamo Jordan!

$F_J = T^{-1} F T$

1. $F = T F_J T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_J} T^{-1}$

Usiamo Jordan!

1. $F = TF_J T^{-1} \quad \Longrightarrow \quad e^{Ft} = Te^{F_J} T^{-1}$

2. $F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad e^{F_J t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{array}\right]$

Usiamo Jordan!

1. $F = TF_J T^{-1} \quad \Longrightarrow \quad e^{Ft} = Te^{F_J} T^{-1}$

2. $$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad e^{F_J t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{array}\right]$$

3. $$J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{array}\right] \quad \Longrightarrow \quad e^{J_{\lambda_i} t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_i,\ell_i} t} \end{array}\right]$$

Usiamo Jordan!

quasi-diagonale

$J_{\lambda_i,j} = \lambda_i I + N$

$$\mathbf{4.}\;\; J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

Usiamo Jordan!

$$\mathbf{4.}\ J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$$

$$\underline{e^{\lambda_i t}},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}
$= h_i =$ molteplicità di λ_i nel pol. minimo

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}
$= h_i =$ molteplicità di λ_i nel pol. minimo

2. Numero di modi distinti complessivi $= n$ (dim. di F)
quando F ha un unico miniblocco per ogni autovalore (F ciclica)

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 2 & \\ \hline & & & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} e^t,\ te^t \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{array} \qquad\qquad \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 2 & \\ \hline & & & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} e^t,\ te^t \\ e^{2t} \end{array}$$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}
$= h_i =$ molteplicità di λ_i nel pol. minimo

2. Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F)
quando F ha un unico miniblocco per ogni autovalore (F ciclica)

3. F diagonalizzabile $\implies$ modi elementari = $e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi distinti associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}
$= h_i$ = molteplicità di λ_i nel pol. minimo

2. Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F)
quando F ha un unico miniblocco per ogni autovalore (F ciclica)

3. F diagonalizzabile $\Longrightarrow$ modi elementari = $e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

4. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow \bar{\lambda}$ autovalore $\Rightarrow$ modi reali $\underline{t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t),\ t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)}$
$\hookrightarrow \sigma + i\omega$

Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

$$\underline{y(t) = Hx(t)} + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = \underline{He^{Ft}x_0} = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

$=$ combinazione lineare di vettori contenenti i modi elementari!

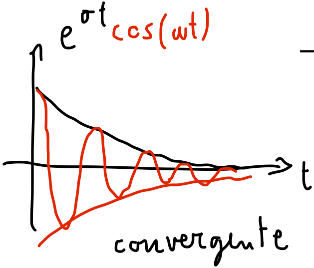
In questa lezione

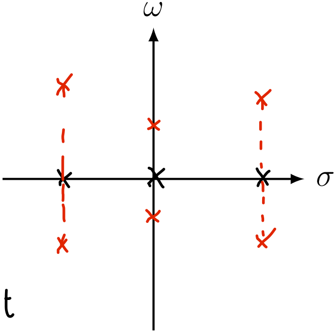
- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
- ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

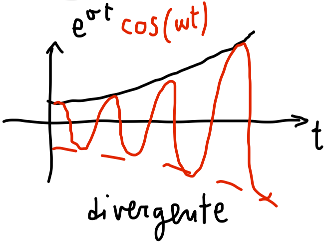
Carattere dei modi elementari

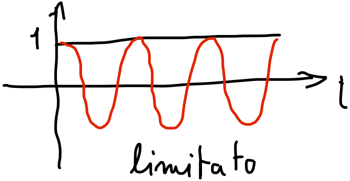
$$\lambda_i \in \mathbb{C} : \underline{t^{k_i} e^{\lambda_i t}} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = \underline{t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))}$$

$\boxed{k_i = 0}$





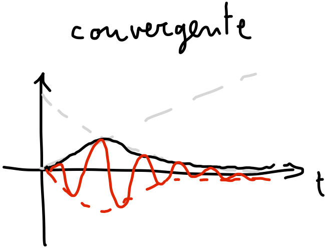


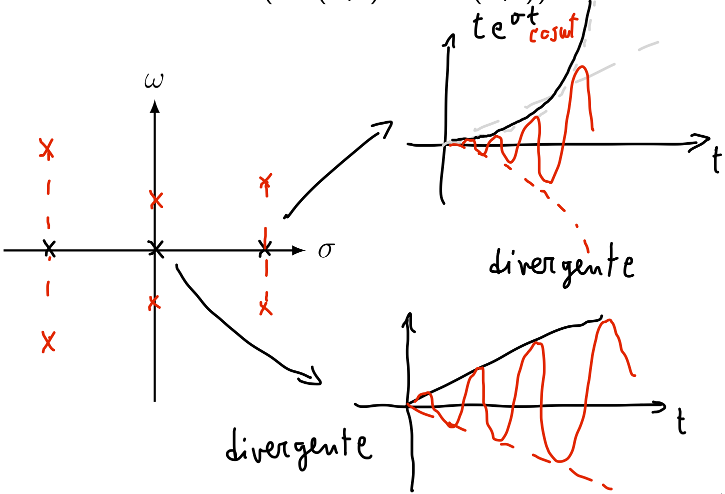


Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$

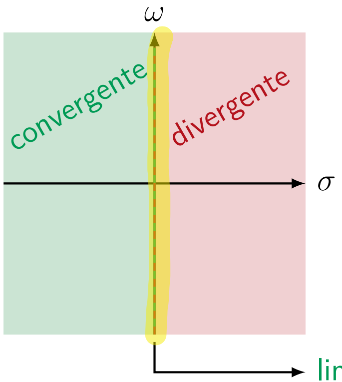
$\boxed{k_i \neq 0}$ $\quad k_i = 1$





Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



$\nu_i = g_i$ $\qquad$ $\nu_i > g_i$

limitato o divergente

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

$\forall H, x_0$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{Ft} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \iff e^{Ft} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$\forall\, H, x_0$

$$\begin{matrix}\Re[\lambda_i] \le 0,\ \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0\end{matrix} \iff e^{Ft} \text{ limitata } \Rightarrow y(t) = \underline{He^{Ft}x_0 \text{ limitata}}$$

Comportamento asintotico

extra

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \iff e^{Ft} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$

$\Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i$ e $\nu_i = g_i$ se $\Re[\lambda_i] = 0$ $\iff$ e^{Ft} limitata $\Rightarrow$ $y(t) = He^{Ft}x_0$ limitata

$\exists\, \lambda_i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$ o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $\nu_i > g_i$ $\iff$ e^{Ft} non limitata $\Rightarrow$ $y(t) = He^{Ft}x_0$?

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
- ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Evoluzione forzata

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

sovrapposizione degli effetti

$$x(t) \overset{\downarrow}{=} x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \qquad x_f(t)\ ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \qquad y_f(t)\ ??$$

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione forzata (con Laplace)

extra

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

Evoluzione forzata (con Laplace)

extra

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - F)^{-1}G}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1. $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare e^{Ft} !!

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica
- ▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equivalenza algebrica

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\, G' = T^{-1}G,\, H' = HT,\, J' = J)$$

Equivalenza algebrica

extra

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\ G,\ H,\ J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G,\ H' = HT,\ J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

Equivalenza algebrica

extra

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\, G' = T^{-1}G,\, H' = HT,\, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) \text{ !!}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT,\, G_J = T^{-1}G,\, H_J = HT,\, J_J = J)$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

$$W(s) = W_J(s) = H_J(sI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right]$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,\ell_k} \end{array}\right]$$

$$W(s) = H_{\lambda_1,1}(sI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(sI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,\ell_k}(sI - J_{\lambda_k,\ell_k})^{-1}G_{\lambda_k,\ell_k} + J$$

$$= W_{\lambda_1,1}(s) + W_{\lambda_1,2}(s) + \cdots + W_{\lambda_k,\ell_k}(s) + J$$

Struttura della matrice di trasferimento

extra

matrici

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{\overset{\downarrow}{A_1}}{s-\lambda_i} + \frac{\overset{\downarrow}{A_2}}{(s-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{\overset{\downarrow}{A_{r_{ij}}}}{(s-\lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s)U(s) + JU(s)\right]$$

In questa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Matrice di trasferimento e equivalenza algebrica

▷ Addendum: calcolo di e^{Ft} tramite Laplace

Calcolare l'esponenziale di matrice con Laplace

extra

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - F)^{-1}\right]$$

Esempio: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Calcolare l'esponenziale di matrice con Laplace

extra

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - F)^{-1}\right]$$

Esempio: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

Condizioni "pratiche" su ciclicità e polinomio minimo

extra

1. F ciclica $\iff$ non ci sono semplificazioni tra num. e den. nel calcolo di

$$(sI - F)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI - F)}{\det(sI - F)}$$

2. $\Psi_F(s) =$ polinomio a den. in $(sI - F)^{-1}$, dopo tutte le possibili semplificazioni

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Evoluzione forzata

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \qquad x_f(t)\ ??$$
$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \qquad y_f(t)\ ??$$

back

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$x(t)$? $y(t)$?

Fatto: $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e^{Ft} è invertibile e $(e^{Ft})^{-1} = e^{-Ft}$.

$$e^{-Ft}\dot{x}(t) = e^{-Ft}Fx(t) + e^{-Ft}Gu(t)$$

$$e^{-Ft}(\dot{x}(t) - Fx(t)) = e^{-Ft}Gu(t) \qquad \Bigg| \quad \frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Ft}x(t)\right) = e^{-Ft}Gu(t)$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{-F\tau}x(\tau)\right)d\tau = \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-Ft}x(t) - \overbrace{e^{-F\cdot 0}}^{I}x(0) = \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau}_{x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t He^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,d\tau + Ju(t)}_{y_f(t)}$$

delta di Dirac

$$y_f(t) = \int_0^t \left[H e^{F(t-\tau)} G + J \underbrace{\delta}_{\text{}}(t-\tau) \right] u(\tau)\, d\tau$$

$$= [w * u](t)$$

$$w(t) = H e^{Ft} G + J \delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

back

Evoluzione forzata (con Laplace)

extra

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

back

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] \triangleq \int_0^{\infty} v(t) e^{-st} dt$$

<u>Proprietà</u>: $\mathcal{L}[\dot{v}(t)] = sV(s) - v(0)$

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s) \\ Y(s) = HX(s) + JU(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = \overbrace{(sI-F)^{-1}x_0}^{X_\ell(s)} + \overbrace{(sI-F)^{-1}G\,U(s)}^{X_f(s)} \\ Y(s) = \underbrace{H(sI-F)^{-1}x_0}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{H(sI-F)^{-1}G\,U(s) + J\,U(s)}_{Y_f(s)} \end{cases}$$

1. $Y_f(s) = \mathcal{L}[y_f(t)] = \overbrace{[H(sI-F)^{-1}G + J]}^{W(s)}\,U(s)$

$$= \mathcal{L}[w * u\,(t)]$$

$W(s) =$ matrice di trasferimento

2. $X_\ell(s) = \mathcal{L}[x_\ell(t)] = \mathcal{L}[e^{Ft}x_0] = (sI-F)^{-1}x_0$

back

$$\mathcal{L}\left[e^{Ft}\right] = (sI - F)^{-1}$$

Equivalenza algebrica

extra

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

back

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$z = T^{-1}x \Rightarrow x = Tz$$

$$\begin{cases} T\dot{z} = FTz + Gu & z(0) = T^{-1}x_0 \\ y = HTz + Ju \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}FTz + T^{-1}Gu & z(0) = T^{-1}x_0 \\ y = HTz + Ju \end{cases}$$

algebricamente equivalenti

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z = T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G,\ H' = HT,\ J' = J)$$

Equivalenza algebrica

extra

$$\dot z(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G,\ H' = HT,\ J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

back

$$\begin{aligned}
W'(s) &= H'(sI - F')^{-1}G' + J' \\
&= HT(sI - T^{-1}FT)^{-1}T^{-1}G + J \\
&= HT(T^{-1}(sI - F)T)^{-1}T^{-1}G + J \\
&= H\cancel{T}\cancel{T^{-1}}(sI - F)^{-1}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G + J \\
&= W(s)
\end{aligned}$$

Struttura della matrice di trasferimento

extra

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{A_1}{s-\lambda_i} + \frac{A_2}{(s-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(s-\lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s)U(s) + JU(s)\right]$$

back

$$W_{\lambda_{i,j}}(s) = H_{\lambda_{i,j}} \underbrace{(sI - J_{\lambda_{i,j}})^{-1}} G_{\lambda_{i,j}}$$

$$J_{\lambda_{i,j}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$(sI - J_{\lambda_{i,j}})^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-F)}{\det(sI-F)}$$

$$J_{\lambda_{i,j}} = \lambda_i I + N \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$((s-\lambda_i)I - N)^{-1} = L$$

$$L \triangleq \frac{I}{s-\lambda_i} + \frac{N}{(s-\lambda_i)^2} + \frac{N^2}{(s-\lambda_i)^3}$$

$$(sI - J_{\lambda_i,j})\,L = I$$

$$\big((s-\lambda_i)I - N\big)\left(\frac{I}{s-\lambda_i} + \frac{N}{(s-\lambda_i)^2} + \frac{N^2}{(s-\lambda_i)^3}\right)$$

$$I - \cancel{\frac{N}{s-\lambda_i}} + \cancel{\frac{N}{s-\lambda_i}} - \cancel{\frac{N^2}{(s-\lambda_i)^2}} + \cancel{\frac{N^2}{(s-\lambda_i)^2}} - \cancel{\frac{N^3}{(s-\lambda_i)^3}} = I$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-\lambda_i} & \frac{1}{(s-\lambda_i)^2} & \frac{1}{(s-\lambda_i)^3} \\ & \frac{1}{s-\lambda_i} & \frac{1}{(s-\lambda_i)^2} \\ & & \frac{1}{s-\lambda_i} \end{bmatrix}$$

Calcolare l'esponenziale di matrice con Laplace

extra

$$\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} \implies e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - F)^{-1}\right]$$

Esempio: $F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

back

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - F)^{-1}\right]$$

$$(sI - F)^{-1} = \begin{bmatrix} s & +1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{-1}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}\left[\cos(wt)\right] = \frac{s}{s^2+w^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\sin(wt)\right] = \frac{1}{s^2+w^2}$$

Condizioni "pratiche" su ciclicità e polinomio minimo

extra

1. F ciclica $\iff$ non ci sono semplificazioni tra num. e den. in $\dfrac{\operatorname{adj}(sI-F)}{\det(sI-F)}$

2. $\Psi_F(s)$ = polinomio a den. in $\dfrac{\operatorname{adj}(sI-F)}{\det(sI-F)}$, dopo tutte le possibili semplificazioni

back

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

F non ciclica

$$(sI-F)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-F)}{\det(sI-F)} = \frac{\begin{bmatrix} \cancel{s-1} & 0 \\ 0 & \cancel{s-1} \end{bmatrix}}{(s-1)^{\cancel{2}}}$$

$$(s-1) = \Psi_F(s)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(sI-F)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-F)}{\det(sI-F)} = \frac{\begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}}{(s-1)^2}$$

F ciclica