Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Complementi di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

noi siamo qui

concetto di sistema

sistemi in spazio di stato

equilibri e linearizzazione

soluzioni e analisi modale

stabilità (cenni)

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

FINISH

Nella scorsa lezione

- Fatti base su vettori e trasformazioni lineari
- Fatti base su matrici

In questa lezione

- ▷ Altri fatti utili su matrici
- ▷ Forma canonica di Jordan
- ▷ Comandi Matlab®

Calcolo determinante e inversa

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, per ogni $i = 1, \dots, n$ ($j = 1, \dots, n$), si ha   sviluppo di Laplace

per righe   per colonne

$$\det(F) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}), \quad \left(\det(F) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}) \right)$$

dove $F_{i-,j-}$ è la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j di F.

$(-1)^{i+j} F_{i-,j-}$ = cofattore / complemento algebrico relativo (i,j)

Calcolo determinante e inversa

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, per ogni $i = 1, \dots, n$ ($j = 1, \dots, n$), si ha

$$\det(F) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}), \quad \left(\det(F) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}) \right)$$

dove $F_{i-,j-}$ è la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j di F.

2. Una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è detta invertibile se esiste una matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $FH = HF = I$, dove I è la matrice identità; $F^{-1} = H$ è detta inversa di F. F è invertibile se e solo se $\det(F) \neq 0$. La matrice inversa F^{-1} si può calcolare come

$$F^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(F)}{\det(F)}, \qquad \to \text{matrice aggiunta di } F$$

dove $\operatorname{adj}(F)$ è la matrice aggiunta di F, $[\operatorname{adj}(F)]_{ij}$ $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ $= (-1)^{i+j} \det(F_{j-,i-})$.

Matrici triangolari (a blocchi)

1. Una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice triangolare superiore (inferiore) se è della forma

$$F = \begin{bmatrix} \overset{F_{11}}{\star} & \star & \cdots & \star \\ 0 & \underset{F_{22}}{\star} & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \underset{F_{nn}}{\star} \end{bmatrix} \quad \left(F = \begin{bmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix} \right).$$

Gli autovalori di una matrice triangolare F sono gli elementi sulla diagonale. L'inversa di una matrice triangolare F (quando esiste) è ancora triangolare e i suoi elementi sulla diagonale soddisfano $[F^{-1}]_{ii} = 1/F_{ii}$.

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 1/F_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & 1/F_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1/F_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrici triangolari (a blocchi)

2. Una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice triangolare superiore (inferiore) a blocchi se

matrici

$$F = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & \star & \cdots & \star \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \star \end{array}\right] \qquad \left(F = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & \star & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \star & \cdots & \star & \star \end{array}\right] \right),$$

dove gli "$\star$" sulla diagonale sono matrici quadrate di dimensioni anche diverse tra loro. Gli autovalori di una matrice triangolare a blocchi F sono l'unione degli autovalori dei blocchi sulla diagonale. L'inversa di una matrice triangolare F a blocchi (quando esiste) è ancora triangolare a blocchi con blocchi diagonali di F^{-1} pari alle inverse dei blocchi diagonali di F.

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad \lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22}), \qquad F^{-1} = \begin{bmatrix} F_{11}^{-1} & * \\ 0 & F_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Esempio: determinante e matrice inversa

$$F = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \det(F)? \;\; F^{-1}?$$

note

Esempio: determinante e matrice inversa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(F)?\ F^{-1}?$$

$$\det(F) = 2 \implies F \text{ invertibile}, \qquad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

note

In questa lezione

- Altri fatti utili su matrici
- Forma canonica di Jordan
- Comandi Matlab®

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$\downarrow$

possiamo trasformare la matrice in una forma a
blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

Forma di Jordan: teorema

Teorema: Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ gli autovalori di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Esiste una $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

blocco relativo a λ_1 miniblocco 1 associato a λ_i

$$F_J \triangleq T^{-1}FT = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right]}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}},\ J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{\nu_i \times \nu_i},\ J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}}.$$

miniblocchi relativi a λ_i = g_i

Inoltre F_J è unica a meno di permutazioni dei blocchi $\{J_{\lambda_i}\}$ e miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$.

quasi-diagonale

$$\boxed{F_J = \text{forma canonica di Jordan di } F}$$

Forma di Jordan: osservazioni

si ottiene costruendo catene di autovettori "generalizzati"

1. Esiste una procedura algoritmica per il calcolo della trasformazione T

2. Dim. blocco J_{λ_i} associato a λ_i $=$ molteplicità algebrica ν_i

3. $\#$ miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$ associati a λ_i $=$ molteplicità geometrica g_i

4. In generale, per determinare F_J non è sufficiente conoscere gli autovalori $\{\lambda_i\}$ e i valori di $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$, ma bisogna anche conoscere i valori di $\{r_{ij}\}$!

5. **Se $\nu_i \leq 3$ $\forall i$, è possibile calcolare F_J conoscendo solo $\{\lambda_i\}$, $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$!**

Forma di Jordan: esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = 0, 1$

note

Forma di Jordan: esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 3,\ g_1 = 1 \implies F_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \alpha = 0, 1 \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 4,\ g_1 = 2$

$$\implies F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

note

In questa lezione

- Altri fatti utili su matrici
- Forma canonica di Jordan
- Comandi Matlab®

Comandi Matlab® – Matrici

`eig(F)`	calcola autovalori della matrice F;
`[V,D] = eig(F)`	calcola matrice V con autovettori di F e matrice diagonale D con autovalori corrispondenti;
`det(F)`	calcola determinante di F;
`null(F)`	calcola base (ortonormale) di $\ker F$;
`orth(F)`	calcola base (ortonormale) di $\operatorname{im} F$;
`rank(F)`	calcola rango di F;
`inv(F)` F^-1	calcola inversa di F;
`[T,J] = jordan(F)`	calcola forma di Jordan di F (matrice J) e matrice di cambio base di Jordan (matrice T) (**N.B.** richiede Symbolic Math Toolbox);

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Complementi di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio: determinante e matrice inversa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(F)?\ F^{-1}?$$

note

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(F) = 1 \cdot (-1)^2 \det \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F_{-1,-1}} + \cancelto{0}{0 \cdot (-1)^3 \det F_{-1,-2}} + \cancelto{0}{0 \cdot (-1)^4 \det F_{-1,-3}}$$

$$= 2 \neq 0 \longrightarrow F \text{ invertibile}$$

$$F^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(F)}{\det(F)}$$

$$\operatorname{adj}(F) = \begin{bmatrix} \det(F_{-1,-1}) & -\det(F_{-2,-1}) & \det(F_{-3,-1}) \\ -\det(F_{-1,-2}) & \det(F_{-2,-2}) & -\det(F_{-3,-2}) \\ \det(F_{-1,-3}) & -\det(F_{-2,-3}) & \det(F_{-3,-3}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(F)}{\det(F)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma di Jordan: esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = 0, 1$

note

1) $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \det \begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\left((\lambda-3)(\lambda-1)+1\right) = (\lambda-2)\underbrace{(\lambda^2-4\lambda+4)}_{(\lambda-2)^2}$$

$$= (\lambda-2)^3$$

Autovalori: $\lambda_1 = 2$, $\nu_1 = 3$

$$g_1 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \operatorname{rank} \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{1} = 2$$

$g_1 < \nu_1 \longrightarrow F$ non è diagonalizzabile $\longrightarrow F_J$?

$$F_J = J_{\lambda_1} = \left[\begin{array}{c:c} J_{\lambda_1,1} & 0 \\ \hdashline 0 & J_{\lambda_1,2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$F_J = \left[\begin{array}{c:cc} 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Ipotesi:

$$\lambda_1 = 2 \quad \nu_1 = 3 \quad \begin{cases} \to g_1 = 1 \longrightarrow F_J = J_{\lambda_1} = J_{\lambda_{1,1}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \to g_1 = 3 \longrightarrow F_J = J_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{1,1}} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\lambda_{1,2}} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\lambda_{1,3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \nu_1 = 2 \quad \begin{cases} \to g_1 = 1 \longrightarrow F_J = J_{\lambda_1} = J_{\lambda_{1,1}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \to g_1 = 2 \longrightarrow F_J = J_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{1,1}} & 0 \\ 0 & J_{\lambda_{1,2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

---

2) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \{0, 1\}$

$\lambda_1 = 1 \quad \nu_1 = 4$

$$g_1 = 4 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 4 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$g_1 < \nu_1 \longrightarrow F$ non diagonalizzabile

$$F_J = J_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{1,1}} & 0 \\ 0 & J_{\lambda_{1,2}} \end{bmatrix}$$

2 miniblocchi 2×2 $\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \alpha = 0$

1 miniblocco 1×1
1 miniblocco 3×3 $\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \alpha = 1$