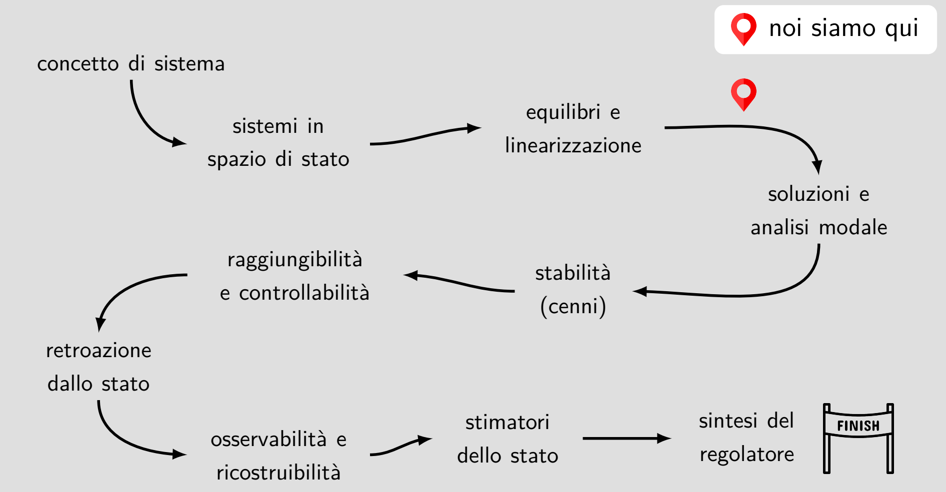
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Complementi di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Altri fatti utili su matrici
- ▷ Forma canonica di Jordan
- ▷ Comandi Matlab®

Calcolo determinante e inversa

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, per ogni $i = 1, \dots, n$ ($j = 1, \dots, n$), si ha

$$\det(F) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}), \quad \left(\det(F) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} F_{ij} \det(F_{i-,j-}) \right)$$

dove $F_{i-,j-}$ è la matrice ottenuta cancellando la riga i e la colonna j di F.

2. Una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è detta invertibile se esiste una matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $FH = HF = I$, dove I è la matrice identità; $F^{-1} = H$ è detta inversa di F. F è invertibile se e solo se $\det(F) \neq 0$. La matrice inversa F^{-1} si può calcolare come

$$F^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(F)}{\det(F)},$$

dove $\operatorname{adj}(F)$ è la matrice aggiunta di F, $[\operatorname{adj}(F)]_{ij} = (-1)^{i+j} \det(F_{j-,i-})$.

Matrici triangolari (a blocchi)

1. Una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice triangolare superiore (inferiore) se è della forma

$$F = \begin{bmatrix} \star & \star & \cdots & \star \\ 0 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \star \end{bmatrix} \quad \left(F = \begin{bmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star & \star \end{bmatrix} \right).$$

Gli autovalori di una matrice triangolare F sono gli elementi sulla diagonale. L'inversa di una matrice triangolare F (quando esiste) è ancora triangolare e i suoi elementi sulla diagonale soddisfano $[F^{-1}]_{ii} = 1/F_{ii}$.

Matrici triangolari (a blocchi)

2. Una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si dice triangolare superiore (inferiore) a blocchi se

$$F = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \star & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & \star & \cdots & \star \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \star \end{array}\right] \quad \left(F = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \star & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & \star & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \star & \cdots & \star & \star \end{array}\right] \right),$$

dove gli "$\star$" sulla diagonale sono matrici quadrate di dimensioni anche diverse tra loro. Gli autovalori di una matrice triangolare a blocchi F sono l'unione degli autovalori dei blocchi sulla diagonale. L'inversa di una matrice triangolare F a blocchi (quando esiste) è ancora triangolare a blocchi con blocchi diagonali di F^{-1} pari alle inverse dei blocchi diagonali di F.

Esempio: determinante e matrice inversa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(F)?\ F^{-1}?$$

$$\det(F) = 2 \implies F \text{ invertibile}, \qquad F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$\downarrow$

possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

Forma di Jordan: teorema

Teorema: Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ gli autovalori di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Esiste una $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$F_J \triangleq T^{-1}FT = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right], \; J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array}\right], \; J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}}.$$

Inoltre F_J è unica a meno di permutazioni dei blocchi $\{J_{\lambda_i}\}$ e miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$.

$$\boxed{F_J = \text{forma canonica di Jordan di } F}$$

Forma di Jordan: osservazioni

1. Esiste una procedura algoritmica per il calcolo della trasformazione T
2. Dim. blocco J_{λ_i} associato a λ_i = molteplicità algebrica ν_i
3. $\#$ miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$ associati a λ_i = molteplicità geometrica g_i
4. In generale, per determinare F_J non è sufficiente conoscere gli autovalori $\{\lambda_i\}$ e i valori di $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$, ma bisogna anche conoscere i valori di $\{r_{ij}\}$!
5. **Se $\nu_i \leq 3$ $\forall i$, è possibile calcolare F_J conoscendo solo $\{\lambda_i\}$, $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$!**

Forma di Jordan: esempi

1. $$F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 3,\ g_1 = 2 \implies F_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. $$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \alpha = 0, 1 \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 4,\ g_1 = 2$$

$$\implies F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Comandi Matlab® – Matrici

`eig(F)`	calcola autovalori della matrice F;
`[V,D] = eig(F)`	calcola matrice V con autovettori di F e matrice diagonale D con autovalori corrispondenti;
`det(F)`	calcola determinante di F;
`null(F)`	calcola base (ortonormale) di $\ker F$;
`orth(F)`	calcola base (ortonormale) di $\operatorname{im} F$;
`rank(F)`	calcola rango di F;
`inv(F)`	calcola inversa di F;
`[T,J] = jordan(F)`	calcola forma di Jordan di F (matrice J) e matrice di cambio base di Jordan (matrice T) (**N.B.** richiede Symbolic Math Toolbox);