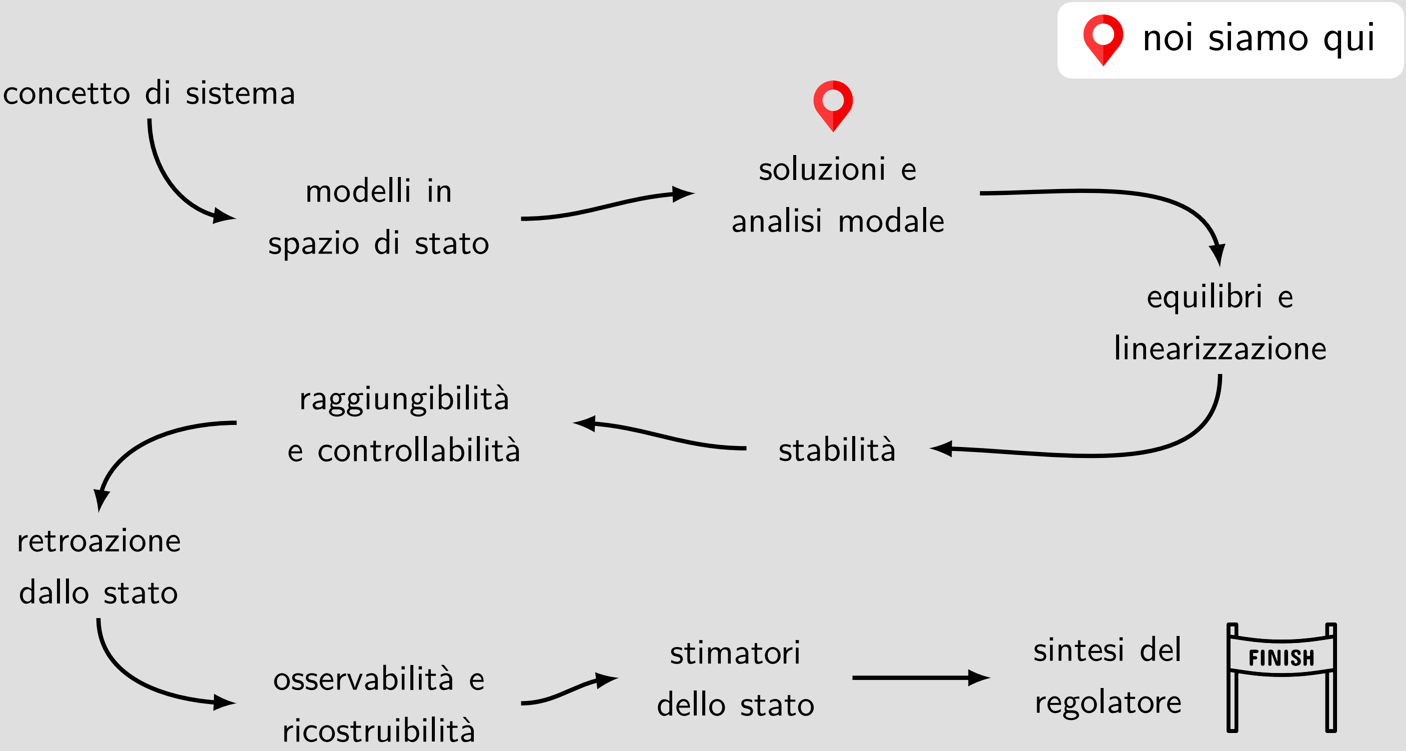
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

$$e^{Ft} = e^{TF_DT^{-1}t} = Te^{F_Dt}T^{-1}$$

$$\exists T : T^{-1}FT = F_D$$

- Richiami di algebra lineare e diagonalizzazione di matrici
- Calcolo dell'esponenziale di matrice tramite diagonalizzazione
- Forma di Jordan

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\exists T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $T^{-1}FT = F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}$

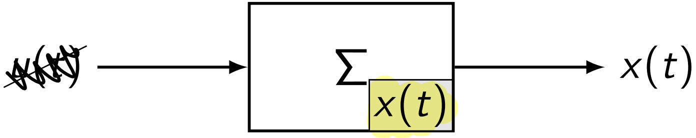
$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{i,1}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_{i,g_i}} \end{bmatrix} \qquad J_{\lambda_{i,j}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Casi particolari:
1) $g_i = 1 \quad \forall i$
2) $n = 1, 2, 3$

In questa lezione

- Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $\quad \underline{x(t) = y(t)} \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{\dot{x}(t) = Fx(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

$$\boxed{x(t) = e^{Ft}x_0}$$

Come calcolare e^{Ft}?

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Big\downarrow$$

$$\boxed{\text{Trovare una matrice } T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ tale che } T^{-1}FT = F_J \text{ !!}}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

$F_J = T^{-1} F T$

1. $F = TF_J T^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_J} T^{-1}$

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{bmatrix}^K = \begin{bmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^k \end{bmatrix}$$

2. $$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right] \implies e^{F_J t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_k} t} \end{array}\right]$$

3. $$J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array}\right] \implies e^{J_{\lambda_i} t} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} e^{J_{\lambda_i,1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & e^{J_{\lambda_i,2} t} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & e^{J_{\lambda_i,g_i} t} \end{array}\right]$$

Calcolo di e^{Ft} tramite Jordan

$$J_{\lambda_{i,j}} = \lambda_i I + N \Rightarrow e^{(\lambda_i I + N)t} = e^{\lambda_i I t} e^{Nt}$$

4. $J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \Rightarrow e^{J_{\lambda_i,j}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}$

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

note

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}

note

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}

F ciclica

2. Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F)

solo quando F ha un solo miniblocco per ogni autovalore !

$\hookrightarrow g_i = 1 \quad \forall i$

note

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}

2. Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F)

solo quando F ha un solo miniblocco per ogni autovalore !

3. F diagonalizzabile $\Longrightarrow$ modi elementari = $e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

note

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \ldots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}

2. Numero di modi distinti complessivi $= n$ (dim. di F)

solo quando F ha un solo miniblocco per ogni autovalore !

3. F diagonalizzabile $\implies$ modi elementari $= e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)

4. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow$ $\bar{\lambda}$ autovalore $\Rightarrow$ modi reali $t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

note

Evoluzione libera $y(t) \neq x(t)$

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$\in \mathbb{R}^p$

$$y(t) = y_\ell(t) = He^{Ft}x_0 = \sum_{i,j} \underline{t^j e^{\lambda_i t}} v_{ij}$$

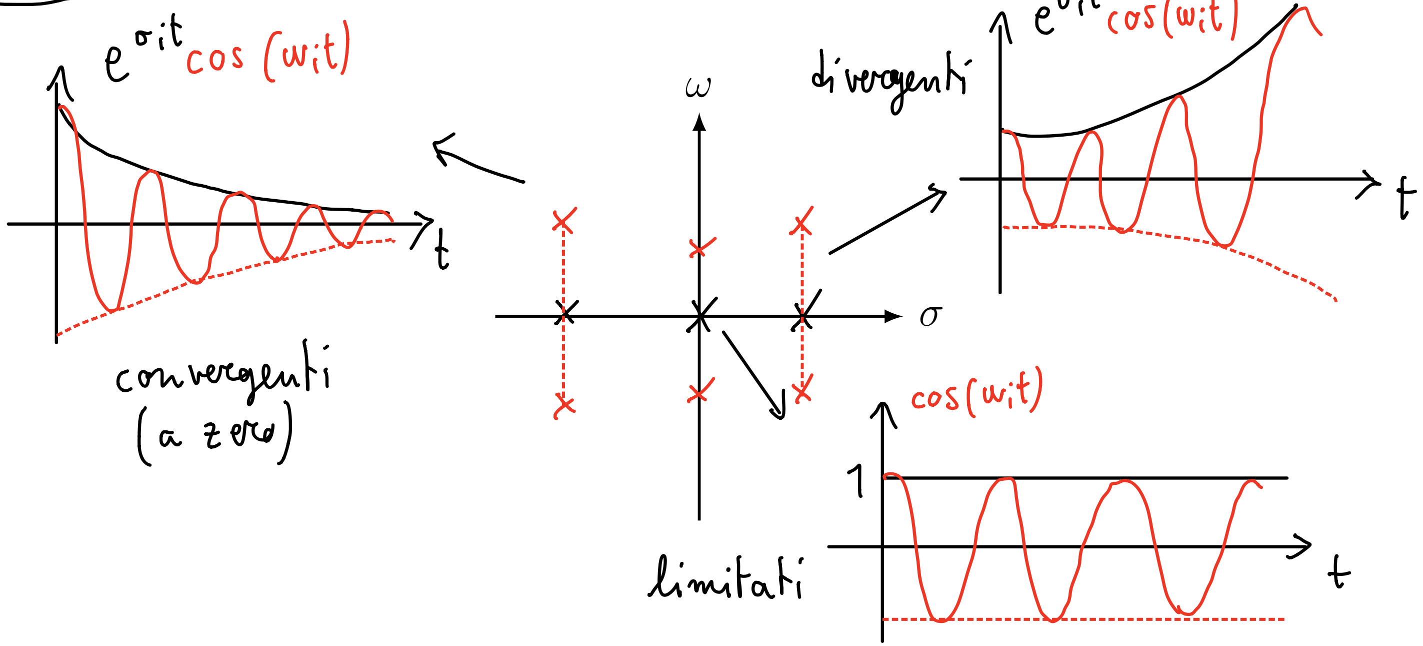
= combinazione lineare di vettori contenenti i modi elementari!

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Carattere dei modi elementari

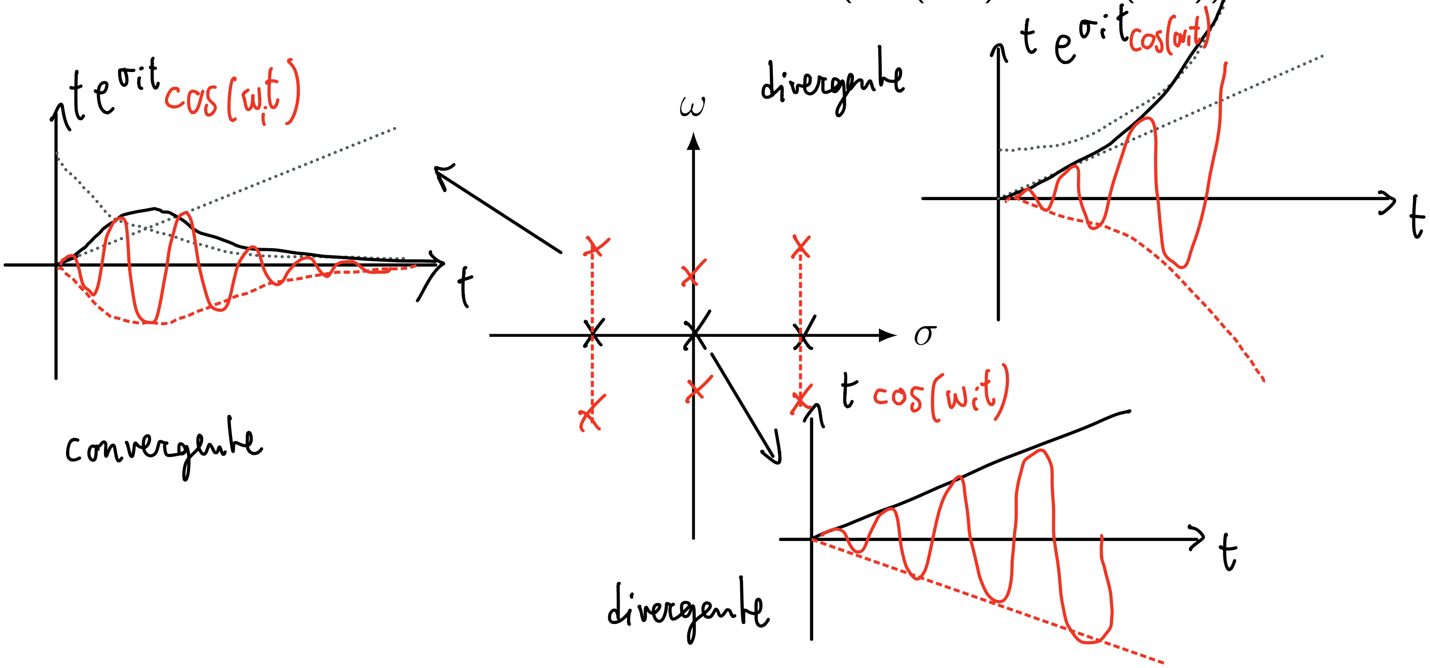
$\boxed{k_i = 0}$ $\quad \lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$



Carattere dei modi elementari

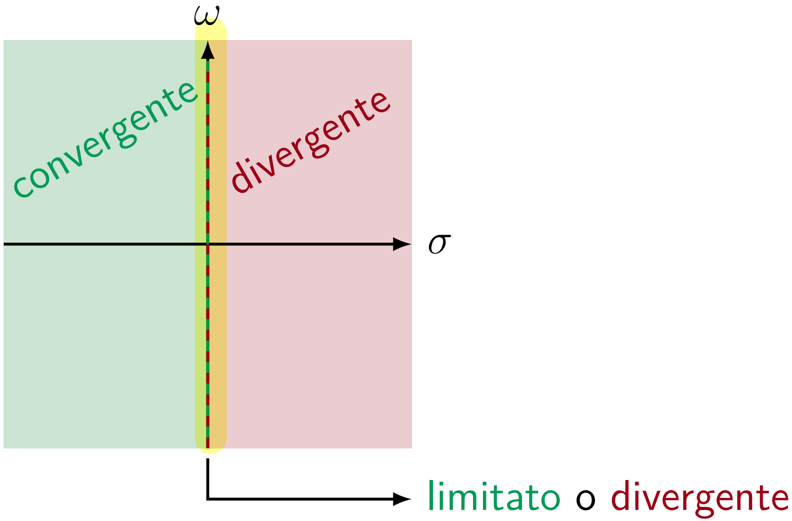
$\boxed{k_i = 1}$

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Carattere dei modi elementari

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : t^{k_i} e^{\lambda_i t} = t^{k_i} e^{(\sigma_i + i\omega_i)t} = t^{k_i} e^{\sigma_i t}(\cos(\omega_i t) + i \sin(\omega_i t))$$



Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \qquad \iff \qquad e^{Ft} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \quad \iff \quad e^{Ft} \xrightarrow{t \to \infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

$$\begin{array}{c} \Re[\lambda_i] \leq 0, \ \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0 \end{array} \quad \iff \quad e^{Ft} \text{ limitata } \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ limitata}$$

Comportamento asintotico

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \quad \iff \quad e^{Ft} \xrightarrow{t\to\infty} 0 \implies y(t) = He^{Ft}x_0 \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

$$\begin{array}{c}\Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i \text{ e} \\ \nu_i = g_i \text{ se } \Re[\lambda_i] = 0\end{array} \quad \iff \quad e^{Ft} \text{ limitata} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0 \text{ limitata}$$

$$\begin{array}{c}\exists\, \lambda_i \text{ tale che } \Re[\lambda_i] > 0 \\ \text{o } \Re[\lambda_i] = 0 \text{ e } \nu_i > g_i\end{array} \quad \iff \quad \underbrace{e^{Ft} \text{ non limitata}}_{\text{divergente}} \Rightarrow y(t) = He^{Ft}x_0\ ? \begin{array}{l}\nearrow \text{divergente} \\ \searrow \text{limitata/convergente}\end{array}$$

dipende H, x_0

In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

sovrapposizione degli effetti

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \qquad x_f(t)\ ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \qquad y_f(t)\ ??$$

libera forzata

note

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione forzata (con Laplace)

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

note

Evoluzione forzata (con Laplace)

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$X(s) = \underbrace{(sI - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sI - F)^{-1}G}_{=X_f(s)}\,U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sI - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

note

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1. $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare e^{Ft} !!

$$\hookrightarrow \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(sI - F)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+1}\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\cos t] & \mathcal{L}[\sin t] \\ -\mathcal{L}[\sin t] & \mathcal{L}[\cos t] \end{bmatrix}$$

In questa lezione

▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo

▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

note

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\ G,\ H,\ J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G,\ H' = HT,\ J' = J)$$

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\, G' = T^{-1}G,\, H' = HT,\, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

note

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\, G' = T^{-1}G,\, H' = HT,\, J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

$$W'(s) = H'(sI - F')^{-1}G' + J' = H(sI - F)^{-1}G + J = W(s) \;!!$$

note

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{base di Jordan}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F,\, G,\, H,\, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT,\, G_J = T^{-1}G,\, H_J = HT,\, J_J = J)$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$T \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{base di Jordan}$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z = T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

$$W(s) = W_J(s) = H_J(sI - F_J)^{-1}G_J + J_J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right]\begin{array}{l} \}\, n_{11} \\ \}\, n_{12} \\ \\ \}\, n_{kg_k} \end{array}, \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{H_{\lambda_1,1}}^{n_{11}} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & \overbrace{H_{\lambda_k,g_k}}^{n_{kg_k}} \end{array}\right]$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_1,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right], \quad G_J = \left[\begin{array}{c} G_{\lambda_1,1} \\ \hline G_{\lambda_1,2} \\ \hline \vdots \\ \hline G_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right], \quad H_J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} H_{\lambda_1,1} & H_{\lambda_1,2} & \cdots & H_{\lambda_k,g_k} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} W(s) &= H_{\lambda_1,1}(sI - J_{\lambda_1,1})^{-1}G_{\lambda_1,1} + H_{\lambda_1,2}(sI - J_{\lambda_1,2})^{-1}G_{\lambda_1,2} + \cdots + H_{\lambda_k,g_k}(sI - J_{\lambda_k,g_k})^{-1}G_{\lambda_k,g_k} + J \\ &= W_{\lambda_1,1}(s) + W_{\lambda_1,2}(s) + \cdots + W_{\lambda_k,g_k}(s) + J \end{aligned}$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$\text{miniblocco } J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{A_1}{s-\lambda_i} + \frac{A_2}{(s-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(s-\lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}: \quad A_1 e^{\lambda_i t} \qquad t A_2 e^{\lambda_i t} \qquad t^{r_{ij}-1} A_{r_{ij}} e^{\lambda_i t}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s)U(s) + JU(s)\right]$$

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata (tempo continuo)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t},\ te^{\lambda_i t},\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda_i t},\ \dots,\ \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a λ_i = dim. del più grande miniblocco in J_{λ_i}
2. Numero di modi distinti complessivi $= n$ (dim. di F)
   solo quando F ha un solo miniblocco per ogni autovalore !
3. F diagonalizzabile $\Longrightarrow$ modi elementari $= e^{\lambda_i t}$ (esponenziali puri)
4. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\Rightarrow \bar{\lambda}$ autovalore $\Rightarrow$ modi reali $t^k e^{\sigma t}\cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

note

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore $\Rightarrow$ $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ è autovalore

$\lambda = \sigma + i\omega$

$$[e^{Ft}]_{ij} = c\,e^{\lambda t} + \bar{c}\,e^{\bar{\lambda} t} \qquad c = a + ib$$

$$= (a+ib)\,e^{(\sigma+i\omega)t} + (a-ib)\,e^{(\sigma-i\omega)t}$$

$$= (a+ib)\,e^{\sigma t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) + (a-ib)\,e^{\sigma t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

$$= 2a\,e^{\sigma t}\cos(\omega t) - 2b\,e^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \qquad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \qquad x_f(t) \text{ ??}$$
$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \qquad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \qquad y_f(t) \text{ ??}$$

note

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$

Osservazioni:

1) $(e^{Ft})^{-1} = e^{-Ft}$ ($\forall F$ e^{Ft} è sempre invertibile)

2) $$\frac{d}{dt} e^{Ft} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k\right) = \frac{d}{dt}\left(I + Ft + \frac{F^2}{2}t^2 + \frac{F^3}{3!}t^3 + \frac{F^4}{4!}t^4 + \dots\right)$$
$$= F + F^2 t + \frac{\cancel{3} F^3 t^2}{\cancel{3}\cdot 2} + \frac{\cancel{4} F^4 t^3}{\cancel{4}\cdot 3!} + \dots$$
$$= F\left(I + Ft + \frac{F^2}{2}t^2 + \frac{F^3}{3!}t^3 + \dots\right)$$
$$= F e^{Ft} = e^{Ft} F$$

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$e^{-Ft}\dot{x}(t) = e^{-Ft}Fx(t) + e^{-Ft}Gu(t)$$
$$\boxed{e^{-Ft}\dot{x}(t) - e^{-Ft}Fx(t)} = e^{-Ft}Gu(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Ft}x(t)\right) = -e^{-Ft}Fx(t) + e^{-Ft}\dot{x}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Ft}x(t)\right) = e^{-Ft}Gu(t)$$
$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{-F\tau}x(\tau)\right)d\tau = \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)\,d\tau$$
$$e^{-Ft}x(t) - e^{-F\cdot 0}x(0) = \int_0^t e^{-F\tau}Gu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-Ft}x(t) - \overbrace{e^{-F\cdot 0}}^{I}x(0) = \int_0^t e^{-F\tau} G u(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x(0)}_{x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau}_{x_f(t)}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \\ &= He^{Ft}x(0) + \int_0^t He^{F(t-\tau)} G u(\tau)\, d\tau + Ju(t) \\ &= \underbrace{He^{Ft}x(0)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t \Big[He^{F(t-\tau)}G + J\underset{\text{delta di Dirac}}{\delta(t-\tau)}\Big] u(\tau)\, d\tau}_{y_f(t)} \end{aligned}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) \quad = \text{risposta impulsiva}$$

$$y_f(t) = [w \underset{\text{prodotto di convoluzione}}{*} u](t)$$

Evoluzione forzata (con Laplace)

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$
$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}\,dt$$

note

G. Baggio — Lez. 6: Modi, risposta libera e forzata (t.c.) — 10 Marzo 2021

Trasformata di Laplace:

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\mathcal{L}[\dot v(t)] = s\,V(s) - v(0^-)$$

$$\begin{cases} \dot x(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) - x(0) = F X(s) + GU(s) \\ Y(s) = H X(s) + J U(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (sI - F)X(s) = x(0) + GU(s) \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = \overbrace{(sI-F)^{-1}x(0)}^{X_\ell(s)} + \overbrace{(sI-F)^{-1}GU(s)}^{X_f(s)} \\ Y(s) = \underbrace{H(sI-F)^{-1}x(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sI-F)^{-1}G + J]\,U(s)}_{Y_f(s)} \end{cases}$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

1) $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sI-F)^{-1}G + J$ = matrice di trasferimento

2) $X_\ell(s) = \mathcal{L}[x_\ell(t)] = \mathcal{L}[e^{Ft}x(0)] = \mathcal{L}[e^{Ft}]\,x(0)$

$= (sI - F)^{-1}x(0)$ $\implies$ $\boxed{\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sI-F)^{-1}}$

Equivalenza algebrica

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Sia $z \triangleq T^{-1}x$ dove $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rappresenta una matrice di cambio di base

Equazioni del sistema espresse nella nuova base?

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

$$z(t) = T^{-1}x(t) \implies x(t) = Tz(t)$$
$$\dot{x}(t) = T\dot{z}(t)$$

$$\begin{cases} T\dot{z}(t) = FTz(t) + Gu(t) \\ y(t) = HTz(t) + Ju(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t) \\ y(t) = HTz(t) + Ju(t) \end{cases} \quad z(0) = T^{-1}x(0)$$

$$\Sigma = (F, G, H, J) \xrightarrow{z = T^{-1}x} \Sigma' = (T^{-1}FT, T^{-1}G, HT, J)$$

Σ, Σ' algebricamente equivalenti

Equivalenza algebrica

$$\dot{z}(t) = T^{-1}FTz(t) + T^{-1}Gu(t), \qquad z(0) = Tx_0$$

$$y(t) = HTz(t) + Ju(t)$$

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F' = T^{-1}FT,\ G' = T^{-1}G,\ H' = HT,\ J' = J)$$

Matrice di trasferimento nella nuova base?

note

$$\Sigma = (F, G, H, J)$$

$$\Sigma' = (T^{-1}FT, T^{-1}G, HT, J)$$

$$W(s) = H(sI - F)^{-1}G + J$$

$$W'(s) = HT(sI - T^{-1}FT)^{-1}T^{-1}G + J$$

$$\overset{!}{=} HT(T^{-1}(sI - F)T)^{-1}T^{-1}G + J$$

$$\overset{!}{=} H\cancel{T}\cancel{T^{-1}}(sI - F)^{-1}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}G + J = W(s)$$

Struttura della matrice di trasferimento

miniblocco $J_{\lambda_i,j} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}} \implies W_{\lambda_i,j}(s) = \frac{A_1}{s-\lambda_i} + \frac{A_2}{(s-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{A_{r_{ij}}}{(s-\lambda_i)^{r_{ij}}}$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i,j} W_{\lambda_i,j}(s)U(s) + JU(s)\right]$$

note

$$W_{\lambda_{i,j}}(s) = H_{\lambda_{i,j}} \left(sI - J_{\lambda_{i,j}}\right)^{-1} G_{\lambda_{i,j}}$$

$$J_{\lambda_{i,j}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}}^{N}$$

$$\left(sI - J_{\lambda_{ij}}\right)^{-1} = \left((s-\lambda_i)I - N\right)^{-1}$$

$$L = \frac{I}{s-\lambda_i} + \frac{N}{(s-\lambda_i)^2} + \frac{N^2}{(s-\lambda_i)^3}$$

$$\left(sI - J_{\lambda_{ij}}\right)L = \left((s-\lambda_i)I - N\right)\left(\frac{I}{s-\lambda_i} + \frac{N}{(s-\lambda_i)^2} + \frac{N^2}{(s-\lambda_i)^3}\right)$$

$$= I - \cancel{\frac{N}{s-\lambda_i}} + \cancel{\frac{N}{s-\lambda_i}} - \cancel{\frac{N^2}{(s-\lambda_i)^2}} + \cancel{\frac{N^2}{(s-\lambda_i)^2}} - \cancel{\frac{N^3}{(s-\lambda_i)^3}} \qquad N^3 = 0$$

$$= I$$

$$\underline{\left(sI - J_{\lambda_{i,j}}\right)^{-1} = L}$$

$$\left(sI - J_{\lambda_{i,j}}\right)^{-1} = \frac{I}{s-\lambda_i} + \frac{N}{(s-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{N^{r_{ij}-1}}{(s-\lambda_i)^{r_{ij}}}$$

$$W_{\lambda_{i,j}}(s) = H_{\lambda_{i,j}} \left(sI - J_{\lambda_{i,j}}\right)^{-1} G_{\lambda_{i,j}} = \frac{H_{\lambda_{i,j}} G_{\lambda_{i,j}}}{s-\lambda_i} + \cdots + \frac{H_{\lambda_{ij}} N^{r_{ij}-1} G_{\lambda_{i,j}}}{(s-\lambda_i)^{r_{ij}}}$$