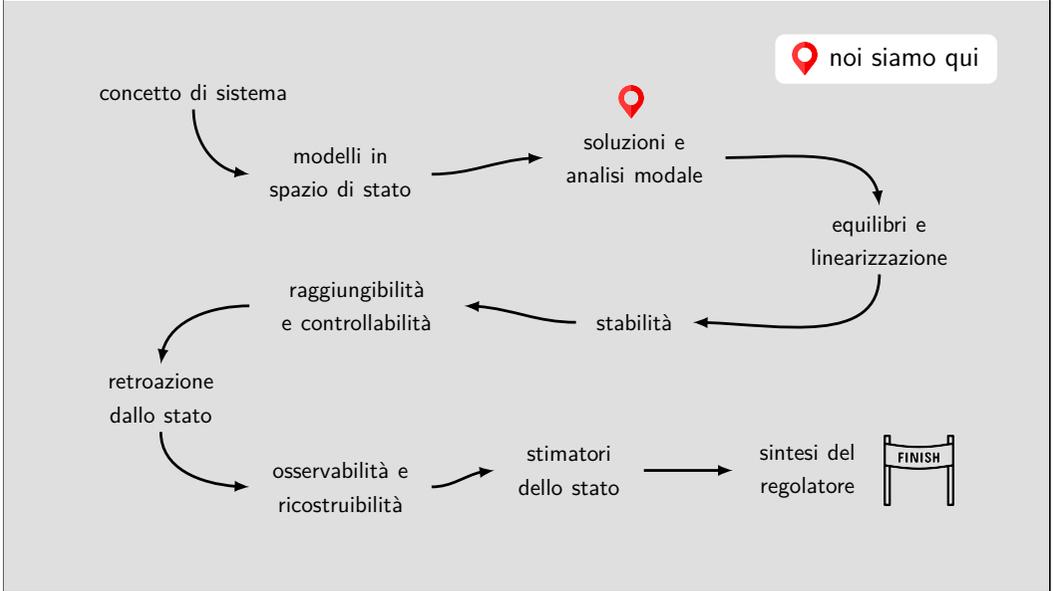


Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 6: Modi di un sistema lineare, risposta libera e forzata
(tempo continuo)

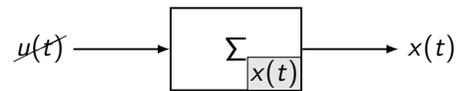
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica
A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Modi elementari e evoluzione libera di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Analisi modale di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Evoluzione forzata di un sistema lineare a tempo continuo
- ▷ Equivalenza algebrica e matrice di trasferimento

Soluzioni di un sistema lineare autonomo?



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0$$

Modi elementari: osservazioni

$$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t}, \dots, \frac{t^{r_{ij}-1}}{(r_{ij}-1)!} e^{\lambda_i t} = \text{modi elementari del sistema}$$

1. Numero di modi *distinti* associati a $\lambda_i = \text{dim. del pi\`u grande miniblocco in } J_{\lambda_i}$
2. Numero di modi distinti complessivi = n (dim. di F)
solo quando F ha un solo miniblocco per ogni autovalore !
3. F diagonalizzabile \implies modi elementari = $e^{\lambda_i t}$ (esponenziali **puri**)
4. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore $\implies \bar{\lambda}$ autovalore \implies modi **reali** $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t), t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$

Evoluzione libera

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)}, \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + \cancel{Ju(t)}$$

$$y(t) = y_\ell(t) = He^{Ft} x_0 = \sum_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} v_{ij}$$

= combinazione lineare di vettori contenenti
i modi elementari!

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t), \quad x_\ell(t) = e^{Ft}x_0, \quad x_f(t) ??$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t), \quad y_\ell(t) = He^{Ft}x_0, \quad y_f(t) ??$$

Evoluzione forzata

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}x_0}_{=x_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau) d\tau}_{=x_f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{He^{Ft}x_0}_{=y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t [He^{F(t-\tau)}G + J\delta(t-\tau)]u(\tau) d\tau}_{=y_f(t)}$$

$$w(t) = He^{Ft}G + J\delta(t) = \text{risposta impulsiva}$$

Evoluzione forzata (con Laplace)

$$sX(s) - x_0 = FX(s) + GU(s)$$

$$Y(s) = HX(s) + JU(s)$$

$$V(s) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st} dt$$

$$X(s) = \underbrace{(sl - F)^{-1}x_0}_{=X_\ell(s)} + \underbrace{(sl - F)^{-1}G}_{=X_f(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{H(sl - F)^{-1}x_0}_{=Y_\ell(s)} + \underbrace{[H(sl - F)^{-1}G + J]U(s)}_{=Y_f(s)}$$

Equivalenze dominio temporale/Laplace

1. $W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = H(sl - F)^{-1}G + J =$ matrice di trasferimento

2. $\mathcal{L}[e^{Ft}] = (sl - F)^{-1} =$ metodo alternativo per calcolare e^{Ft} !!

Struttura della matrice di trasferimento

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ = base di Jordan

$$(F, G, H, J) \xrightarrow{z=T^{-1}x} (F_J = T^{-1}FT, G_J = T^{-1}G, H_J = HT, J_J = J)$$

$$W(s) = W_J(s) = H_J(sI - F_J)^{-1}G_J + J$$

Struttura della matrice di trasferimento

$$F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{1,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_{1,2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_{k,g_k}} \end{bmatrix}, \quad G_J = \begin{bmatrix} G_{\lambda_{1,1}} \\ G_{\lambda_{1,2}} \\ \vdots \\ G_{\lambda_{k,g_k}} \end{bmatrix}, \quad H_J = [H_{\lambda_{1,1}} \mid H_{\lambda_{1,2}} \mid \cdots \mid H_{\lambda_{k,g_k}}]$$

$$\begin{aligned} W(s) &= H_{\lambda_{1,1}}(sI - J_{\lambda_{1,1}})^{-1}G_{\lambda_{1,1}} + H_{\lambda_{1,2}}(sI - J_{\lambda_{1,2}})^{-1}G_{\lambda_{1,2}} + \cdots + H_{\lambda_{k,g_k}}(sI - J_{\lambda_{k,g_k}})^{-1}G_{\lambda_{k,g_k}} + J \\ &= W_{\lambda_{1,1}}(s) + W_{\lambda_{1,2}}(s) + \cdots + W_{\lambda_{k,g_k}}(s) + J \end{aligned}$$
