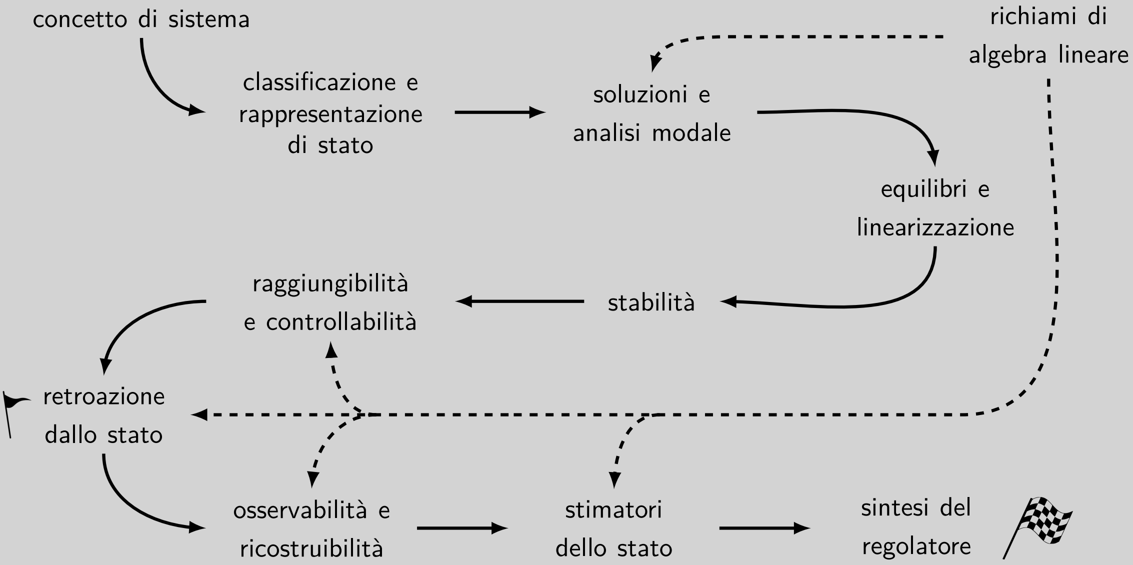
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

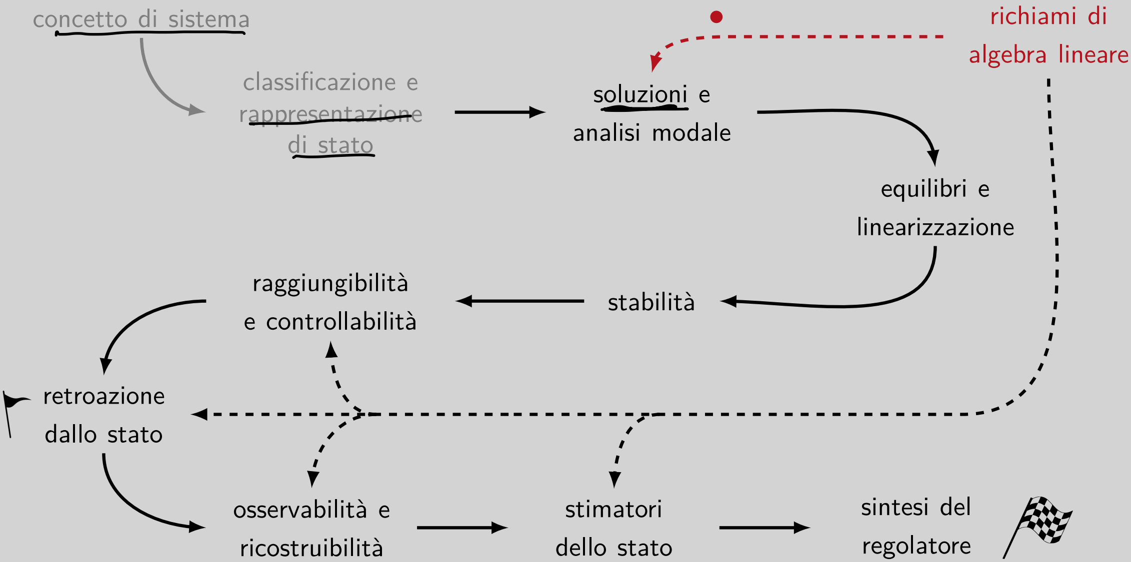
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Forma di Jordan e Polinomio Minimo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore



• noi siamo qui

Nelle scorse lezioni

- Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
  - Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
    - Concetti base di algebra lineare
      - Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
        - Forma canonica di Jordan: idea generale

In questa lezione

- Forma canonica di Jordan: costruzione ⇝ caso concreto

- Forma canonica di Jordan: algoritmo generale

- Forma canonica di Jordan: osservazioni

- Polinomi annullatori e polinomio minimo

In questa lezione

- Forma canonica di Jordan: costruzione
- Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- Forma canonica di Jordan: osservazioni
- Polinomi annullatori e polinomio minimo

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$\Downarrow$

Non esistono $\underline{\nu_i \text{ vettori}}$ lin. indip. in $\underline{\ker(F - \lambda_i I)}$ $\mapsto g_i$

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$$\Downarrow$$

Non esistono ν_i vettori lin. indip. in $\ker(F - \lambda_i I)$

Però possiamo aggiungere agli autovettori di λ_i altri $\nu_i - g_i$ vettori lin. indip. in modo da formare ν_i vettori lin. indip.!

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$$\Downarrow$$

Non esistono ν_i vettori lin. indip. in $\ker(F - \lambda_i I)$

Però possiamo aggiungere agli autovettori di λ_i altri $\nu_i - g_i$ vettori lin. indip. in modo da formare ν_i vettori lin. indip.!

Tante scelte possibili, ma ne esiste una "furba"...

Fatto importante

3) successione di spazi strettamente ascendente fino alla potenza $\bar{\ell}$

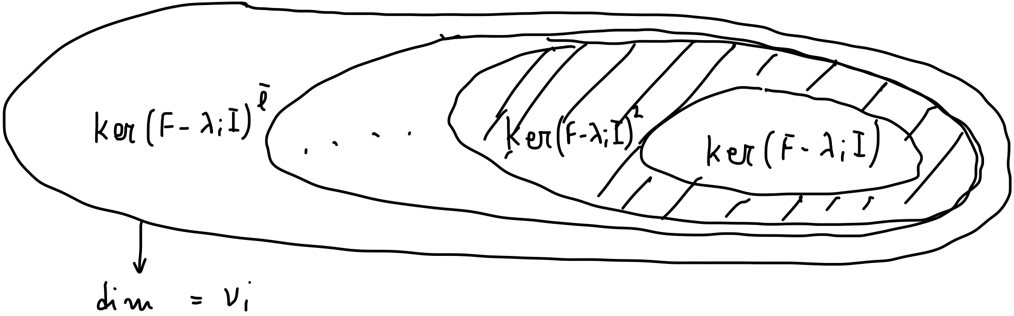
4) successione di spazi diventa stazionaria per potenze $\geq \bar{\ell}$

1) $\ker(F - \lambda_i I)^{\ell} \subseteq \ker(F - \lambda_i I)^{\ell+1}$, per ogni $\ell = 1, 2, 3, \ldots$

$Fv = 0$

$F^2 v = F(Fv) = 0$

2) ed esiste $\bar{\ell}$ tale che $\dim \ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}} = \nu_i$



Forma di Jordan: costruzione

$\nu_1 > g_1 \rightarrow$ non diagonalizz.

$F \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con 1 autovalore λ_1 con $\nu_1 = 10$ e $g_1 = 5$

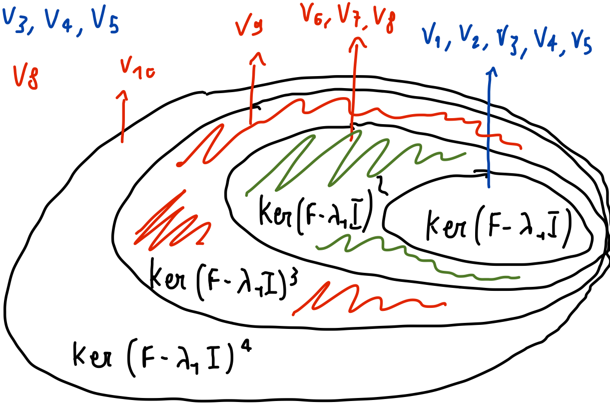
$\dim\ker(F - \lambda_1 I) = 5 \longrightarrow v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$

$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^2 = 8 \longrightarrow v_6, v_7, v_8$

$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^3 = 9 \longrightarrow v_9$

$\dim\ker(F - \lambda_1 I)^4 = 10 \longrightarrow v_{10}$

$\bar{l} = 4$



Forma di Jordan: costruzione

$$F \in \mathbb{R}^{10\times 10} \text{ con 1 autovalore } \lambda_1 \text{ con } \nu_1 = 10 \text{ e } g_1 = 5$$

$\dim \ker(F - \lambda_1 I) = 5$	$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5$	autovettori lin. indip.
$\dim \ker(F - \lambda_1 I)^2 = 8$	$v_6,\ v_7,\ v_8$	
$\dim \ker(F - \lambda_1 I)^3 = 9$	v_9	autovettori generalizzati
$\dim \ker(F - \lambda_1 I)^4 = 10$	v_{10}	

$$\{v_1, \dots, v_{10}\} \text{ base di } \mathbb{R}^{10}$$

Forma di Jordan: costruzione

$v_{10}\,:\,(F-\lambda_1 I)^4 v_{10} = 0,\ (F-\lambda_1 I)^3 v_{10} \neq 0$

Forma di Jordan: costruzione

$v_{10} : (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0, \; (F - \lambda_1 I)^3 v_{10} \neq 0$

$\hookrightarrow (F - \lambda_1 I)^3 (F - \lambda_1 I) v_{10} = (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0$

$\omega_9 \triangleq \underline{(F - \lambda_1 I) v_{10}} : (F - \lambda_1 I)^3 \omega_9 = 0, \; (F - \lambda_1 I)^2 \omega_9 \neq 0$

$\underline{v_9 \leftarrow \omega_9}$

Forma di Jordan: costruzione

$$v_{10} : (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0,\ (F - \lambda_1 I)^3 v_{10} \neq 0$$

$$\omega_9 \triangleq (F - \lambda_1 I) v_{10} : (F - \lambda_1 I)^3 \omega_9 = 0,\ (F - \lambda_1 I)^2 \omega_9 \neq 0$$

$$v_9 \leftarrow \omega_9$$

$$\to (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0$$

$$\underline{\omega_8 \triangleq (F - \lambda_1 I) \omega_9 :} \ (F - \lambda_1 I)^2 \omega_8 = 0,\ (F - \lambda_1 I) \omega_8 \neq 0$$

$$\underline{v_8 \leftarrow \omega_8}$$

Forma di Jordan: costruzione

Fatto:

v_{10}, w_9, w_8, w_5 lin. indip.

$v_{10} : (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0, \; (F - \lambda_1 I)^3 v_{10} \neq 0$

$\omega_9 \triangleq (F - \lambda_1 I) v_{10} : (F - \lambda_1 I)^3 \omega_9 = 0, \; (F - \lambda_1 I)^2 \omega_9 \neq 0$

$v_9 \leftarrow \omega_9$

$\omega_8 \triangleq (F - \lambda_1 I) \omega_9 : (F - \lambda_1 I)^2 \omega_8 = 0, \; (F - \lambda_1 I) \omega_8 \neq 0$

$v_8 \leftarrow \omega_8$

$\omega_5 \triangleq \underline{(F - \lambda_1 I) \omega_8} : \underline{(F - \lambda_1 I) \omega_5 = 0}$

$\underline{v_5 \leftarrow \omega_5}$

Forma di Jordan: costruzione

$$v_{10} : (F - \lambda_1 I)^4 v_{10} = 0,\ (F - \lambda_1 I)^3 v_{10} \neq 0$$

$$\omega_9 \triangleq (F - \lambda_1 I) v_{10} : (F - \lambda_1 I)^3 \omega_9 = 0,\ (F - \lambda_1 I)^2 \omega_9 \neq 0$$

$$v_9 \leftarrow \omega_9$$

$$\omega_8 \triangleq (F - \lambda_1 I) \omega_9 : (F - \lambda_1 I)^2 \omega_8 = 0,\ (F - \lambda_1 I) \omega_8 \neq 0$$

$$v_8 \leftarrow \omega_8$$

catena di Jordan

catena di autovettori generalizzati

$$\underline{\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]}$$

$$\omega_5 \triangleq (F - \lambda_1 I) \omega_8 : (F - \lambda_1 I) \omega_5 = 0$$

$$v_5 \leftarrow \omega_5$$

Forma di Jordan: costruzione

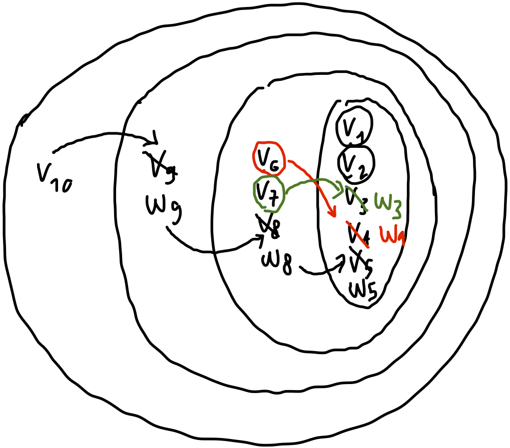
$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$ → lungh. 4

$\mathcal{C}_2 = [\omega_4, v_6]$ → lungh. 2

$\mathcal{C}_3 = [\omega_3, v_7]$ → " "

$\mathcal{C}_4 = v_2$ → lungh. 1

$\mathcal{C}_5 = v_1$ → lungh. 1



Forma di Jordan: costruzione

$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$

$\mathcal{C}_2 = [\omega_4, v_6]$

$\mathcal{C}_3 = [\omega_3, v_7]$

$\mathcal{C}_4 = v_2$

$\mathcal{C}_5 = v_1$

matrice di cambio base

$T = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5] \in \mathbb{R}^{10\times 10}$

Forma di Jordan: costruzione

$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$

$\mathcal{C}_2 = [\omega_4, v_6]$

$\mathcal{C}_3 = [\omega_3, v_7]$

$\mathcal{C}_4 = v_2$

$\mathcal{C}_5 = v_1$

matrice di cambio base

$T = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5]$

oppure $T = [\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1]$

Forma di Jordan: costruzione

$$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$$

$$\mathcal{C}_2 = [\omega_4, v_6]$$

$$\mathcal{C}_3 = [\omega_3, v_7]$$

$$\mathcal{C}_4 = v_2$$

$$\mathcal{C}_5 = v_1$$

matrice di cambio base

$$T = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5]$$

oppure $T = [\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1]$

oppure $T = [\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$

Forma di Jordan: costruzione

$$T = [w_5, w_8, \boxed{w_4, v_6}, w_9, v_{10}, \ldots \quad]$$

$\mathcal{C}_1 = [\omega_5, \omega_8, \omega_9, v_{10}]$

$\mathcal{C}_2 = [\omega_4, v_6]$

$\mathcal{C}_3 = [\omega_3, v_7]$

$\mathcal{C}_4 = v_2$

$\mathcal{C}_5 = v_1$

matrice di cambio base

$T = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5]$

oppure $T = [\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1]$

oppure $T = [\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$

...ma mai spezzare le catene!

Forma di Jordan: costruzione

che forma ha $F' = T^{-1}FT$?

Forma di Jordan: costruzione

che forma ha $F' = T^{-1}FT$?

vediamo come vengono mappati vettori della base di Jordan in vettori della stessa base, dopo aver applicato F

$$\underline{(F - \lambda_1 I)\omega_5 = 0} \implies \underline{F\omega_5 = \lambda_1\omega_5}$$

$$(F - \lambda_1 I)\omega_8 \overset{\Delta}{=} \omega_5 \implies \underline{F\omega_8 = \omega_5 + \lambda_1\omega_8}$$

$$(F - \lambda_1 I)\omega_9 = \omega_8 \implies F\omega_9 = \omega_8 + \lambda_1\omega_9$$

$$(F - \lambda_1 I)v_{10} = \omega_9 \implies Fv_{10} = \omega_9 + \lambda_1 v_{10}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Forma di Jordan: costruzione

che forma ha $F' = T^{-1}FT$?

$$(F - \lambda_1 I)\omega_5 = 0 \implies F\omega_5 = \lambda_1\omega_5$$

$$(F - \lambda_1 I)\omega_8 = \omega_5 \implies F\omega_8 = \omega_5 + \lambda_1\omega_8$$

$$(F - \lambda_1 I)\omega_9 = \omega_8 \implies F\omega_9 = \omega_8 + \lambda_1\omega_9$$

$$(F - \lambda_1 I)v_{10} = \omega_9 \implies Fv_{10} = \omega_9 + \lambda_1 v_{10}$$

$F\omega_4 = \lambda_1\omega_4$ $\quad$ $F\omega_3 = \lambda_1\omega_3$ $\quad$ $Fv_2 = \lambda_2 v_2$ $\quad$ $Fv_1 = \lambda_1 v_1$

$Fv_6 = \omega_4 + \lambda_1 v_6$ $\quad$ $Fv_7 = \omega_3 + \lambda_1 v_7$

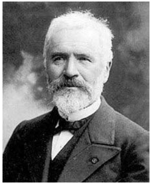
Forma di Jordan: costruzione

miniblocco di Jordan

$$
\underline{F_J} \triangleq F' = T^{-1}FT =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\mathcal{C}_1}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\quad}^{\mathcal{C}_2}} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\qquad\quad}^{\mathcal{C}_3}} & \overbrace{\quad}^{\mathcal{C}_4} & \overbrace{\quad}^{\mathcal{C}_5}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_1}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

matrice a blocchi diagonali o quasi-diagonali

Forma di Jordan: costruzione



$$F_J \triangleq F' = T^{-1}FT = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c}
\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1
\end{array}\right]$$

In questa lezione

- Forma canonica di Jordan: costruzione
- Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- Forma canonica di Jordan: osservazioni
- Polinomi annullatori e polinomio minimo

Forma di Jordan: caso generale

F ha autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ (possibilmente con $\nu_i > g_i$)

Fatto importante: autovettori (veri o generalizzati) corrispondenti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti.

Forma di Jordan: caso generale

F ha autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$ (possibilmente con $\nu_i > g_i$)

Fatto importante: autovettori (veri o generalizzati) corrispondenti ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti.

λ_1

$$F_J = T^{-1}F\boxed{T} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \boxed{J_{\lambda_1}} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_\ell} \end{array}\right]$$

$$J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,\ell_i} \end{array}\right]$$

quasi-diag.

$$J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

blocco di Jordan

miniblocco di Jordan

Forma di Jordan: algoritmo generale

1. Data $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, calcolare autovalori λ_i, molt. algebriche ν_i e geometriche g_i

Forma di Jordan: algoritmo generale

1. Data $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, calcolare autovalori λ_i, molt. algebriche ν_i e geometriche g_i

2. Per tutti i λ_i tali che $\underline{\nu_i = g_i}$ calcolare ν_i autovettori lin. indip.

$\left(\forall \lambda_i,\ \nu_i = g_i \quad \text{FINE!} \right)$

Forma di Jordan: algoritmo generale

1. Data $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, calcolare autovalori λ_i, molt. algebriche ν_i e geometriche g_i

2. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i = g_i$ calcolare ν_i autovettori lin. indip.

3. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i > g_i$ (se esistono) calcolare ν_i vettori lin. indip. completando i g_i autovettori con $\nu_i - g_i$ autovettori generalizzati in

$$\ker(F - \lambda_i I)^2, \ker(F - \lambda_i I)^3, \dots, \ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}}$$

Forma di Jordan: algoritmo generale

1. Data $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, calcolare autovalori λ_i, molt. algebriche ν_i e geometriche g_i

2. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i = g_i$ calcolare ν_i autovettori lin. indip.

3. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i > g_i$ (se esistono) calcolare ν_i vettori lin. indip. completando i g_i autovettori con $\nu_i - g_i$ autovettori generalizzati in

$$\ker(F - \lambda_i I)^2, \ker(F - \lambda_i I)^3, \dots, \ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}}$$

4. Calcolare le catene di Jordan partendo dagli ultimi autovettori generalizzati

(e ordinarle in maniera "crescente"!)

Forma di Jordan: algoritmo generale

1. Data $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, calcolare autovalori λ_i, molt. algebriche ν_i e geometriche g_i

2. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i = g_i$ calcolare ν_i autovettori lin. indip.

3. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i > g_i$ (se esistono) calcolare ν_i vettori lin. indip. completando i g_i autovettori con $\nu_i - g_i$ autovettori generalizzati in

$$\ker(F - \lambda_i I)^2, \ker(F - \lambda_i I)^3, \ldots, \ker(F - \lambda_i I)^{\bar{\ell}}$$

4. Calcolare le catene di Jordan partendo dagli ultimi autovettori generalizzati

(e ordinarle in maniera "crescente"!)

5. Calcolare la matrice di cambio di base T ottenuta concatenando le catene

(senza spezzarle!)

Forma di Jordan: algoritmo generale

1. Data $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, calcolare autovalori λ_i, molt. algebriche ν_i e geometriche g_i

2. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i = g_i$ calcolare ν_i autovettori lin. indip.

3. Per tutti i λ_i tali che $\nu_i > g_i$ (se esistono) calcolare ν_i vettori lin. indip. completando i g_i autovettori con $\nu_i - g_i$ autovettori generalizzati in

$$\ker(F-\lambda_i I)^2, \ker(F-\lambda_i I)^3, \dots, \ker(F-\lambda_i I)^{\bar{\ell}}$$

4. Calcolare le catene di Jordan partendo dagli ultimi autovettori generalizzati

(e ordinarle in maniera "crescente"!)

5. Calcolare la matrice di cambio di base T ottenuta concatenando le catene

(senza spezzarle!)

6. $F_J = T^{-1}FT$

In questa lezione

- Forma canonica di Jordan: costruzione
- Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- Forma canonica di Jordan: osservazioni
- Polinomi annullatori e polinomio minimo

Forma di Jordan: osservazioni

extra

1. La forma canonica di Jordan F_J è univocamente determinata a meno di una permutazione dei suoi blocchi/miniblocchi.

Forma di Jordan: osservazioni

extra

1. La forma canonica di Jordan F_J è univocamente determinata a meno di una permutazione dei suoi blocchi/miniblocchi.

2. Dimensione blocco = $\underbrace{\text{molteplicità algebrica}}_{}$ autovalore corrispondente ν_i
   Dimensione miniblocco = lunghezza catena corrispondente
   Numero miniblocchi = molteplicità geometrica autovalore corrispondente

Forma di Jordan: osservazioni

extra

1. La forma canonica di Jordan F_J è univocamente determinata a meno di una permutazione dei suoi blocchi/miniblocchi.

2. Dimensione blocco = molteplicità algebrica autovalore corrispondente
   Dimensione miniblocco = lunghezza catena corrispondente
   Numero miniblocchi = molteplicità geometrica autovalore corrispondente

3. Per calcolare F_J non è sempre necessario il calcolo esplicito delle catene!!!

   (i) $F: \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \nu_2 = 2,\ g_2 = 2$

   (ii) $F: \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 3,\ g_1 = 2$

   (iii) $F: \lambda_1 = 5,\ \nu_1 = 4,\ g_1 = 2$

In questa lezione

- Forma canonica di Jordan: costruzione
- Forma canonica di Jordan: algoritmo generale
- Forma canonica di Jordan: osservazioni
- Polinomi annullatori e polinomio minimo

Polinomio annullatore di una matrice

Definizione: Un polinomio $p(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si dice *polinomio annullatore di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$* se

$$p(F) = a_\ell F^\ell + a_{\ell-1}F^{\ell-1} + \cdots + a_1 F + a_0 I = \overset{\text{matrice } n\times n}{0}.$$

Polinomio annullatore di una matrice

Definizione: Un polinomio $p(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si dice *polinomio annullatore* di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se

$$p(F) = a_\ell F^\ell + a_{\ell-1}F^{\ell-1} + \cdots + a_1 F + a_0 I = 0.$$

$$\underline{p(F) = 0} \iff p(T^{-1}FT) = 0,\ T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{matrice di cambio di base}$$

$$\hookrightarrow a_\ell T^{-1}F^\ell T + a_{\ell-1}T^{-1}F^{\ell-1}T + \cdots + a_0 I = 0$$

Polinomio annullatore di una matrice

Definizione: Un polinomio $p(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si dice *polinomio annullatore* di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se

$$p(F) = a_\ell F^\ell + a_{\ell-1}F^{\ell-1} + \cdots + a_1 F + a_0 I = 0.$$

$$p(F) = 0 \iff p(T^{-1}FT) = 0,\ T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{matrice di cambio di base}$$

$$\iff p(F_J) = 0$$

$$F_J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_k} \end{bmatrix} \quad J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{i,1}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_{i,\ell}} \end{bmatrix}$$

Polinomio annullatore di una matrice

Definizione: Un polinomio $p(x) = a_\ell x^\ell + a_{\ell-1}x^{\ell-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ si dice *polinomio annullatore* di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se

$$p(F) = a_\ell F^\ell + a_{\ell-1}F^{\ell-1} + \cdots + a_1 F + a_0 I = 0.$$

$$p(F) = 0 \iff p(T^{-1}FT) = 0,\ T \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{matrice di cambio di base}$$

$$\iff p(F_J) = 0$$

$$\iff p(J_{\lambda_{i,j}}) = 0,\ \forall i, j$$

Polinomio annullatore di una matrice

extra

$$p(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_\ell)^{\alpha_\ell} \overset{\text{se ann.}}{\Longrightarrow} p(F) = (F - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (F - x_\ell I)^{\alpha_\ell} = 0$$

Analizziamo un miniblocco: $p(J_{\lambda_{i,j}}) = (J_{\lambda_{i,j}} - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (J_{\lambda_{i,j}} - x_\ell I)^{\alpha_\ell} = 0$

Polinomio annullatore di una matrice

extra

$$p(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_\ell)^{\alpha_\ell} \implies p(F) = (F - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (F - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$$

Analizziamo un miniblocco: $p(J_{\lambda_{i,j}}) = (J_{\lambda_{i,j}} - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (J_{\lambda_{i,j}} - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$

Per avere $p(F) = 0$:

- $p(\lambda_i) = 0$, per ogni autovalore λ_i di F
- $\alpha_i \geq$ dimensione del più grande miniblocco associato a λ_i

$x_i = \lambda_i$

Polinomio annullatore di una matrice

extra

$$p(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_\ell)^{\alpha_\ell} \implies p(F) = (F - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (F - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$$

Analizziamo un miniblocco: $p(J_{\lambda_{i,j}}) = (J_{\lambda_{i,j}} - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (J_{\lambda_{i,j}} - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$

Per avere $p(F) = 0$:

molteplicità "minima"

- $p(\lambda_i) = 0$, per ogni autovalore λ_i di F
- $\alpha_i \geq$ dimensione del più grande miniblocco associato a $\lambda_i \triangleq \boxed{h_i}$

Polinomio minimo di una matrice

Definizione: Il polinomio annullatore di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di grado più piccolo possibile si dice *polinomio minimo di F* e verrà denotato con $\Psi_F(x)$.

Polinomio minimo di una matrice

Definizione: Il polinomio annullatore di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di grado più piccolo possibile si dice *polinomio minimo* di F e verrà denotato con $\Psi(x)$.

$$\underline{\Psi_F(x) = (x - \lambda_1)^{h_1}(x - \lambda_2)^{h_2} \cdots (x - \lambda_k)^{h_k}}$$

h_i = moltepliciltà dell'autovalore λ_i come radice di $\Psi_F(x)$

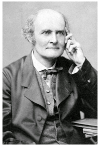
Polinomio minimo di una matrice

Definizione: Il polinomio annullatore di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di grado più piccolo possibile si dice *polinomio minimo* di F e verrà denotato con $\Psi(x)$.

$$\Psi(x) = (x - \lambda_1)^{h_1}(x - \lambda_2)^{h_2} \cdots (x - \lambda_k)^{h_k}$$

$$\boxed{\text{Notare che: } \nu_i \geq h_i}$$

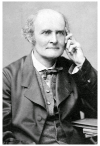
Teorema di Cayley–Hamilton



Teorema: Il polinomio caratteristico di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è sempre un polinomio annullatore di F stessa:

$$\Delta_F(F) = 0.$$

Teorema di Cayley–Hamilton



Teorema: Il polinomio caratteristico di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è sempre un polinomio annullatore di F stessa:

$$\Delta_F(F) = 0.$$

Più precisamente $\Delta_F(x)$ è un multiplo di $\Psi(x)$ e

$\Delta_F(x) = \Psi(x)$ quando F ha un solo miniblocco per ogni autovalore!

F ciclica

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Forma di Jordan e Polinomio Minimo

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Forma di Jordan: osservazioni

extra

1. La forma canonica di Jordan F_J è univocamente determinata a meno di una permutazione dei suoi blocchi/miniblocchi.

2. Dimensione blocco = molteplicità algebrica autovalore corrispondente
   Dimensione miniblocco = lunghezza catena corrispondente
   Numero miniblocchi = molteplicità geometrica autovalore corrispondente

3. Per calcolare F_J non è sempre necessario il calcolo esplicito delle catene!!!

   (i) $F: \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \nu_2 = 2,\ g_2 = 2$

   (ii) $F: \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 3,\ g_1 = 2$

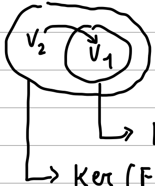
   (iii) $F: \lambda_1 = 5,\ \nu_1 = 4,\ g_1 = 2$

back

(i) $F: \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1$

$\lambda_2 = 5,\ \nu_2 = 2,\ g_1 = 2 \rightarrow$ 2 catene di lunghezza 1

$\nu_1 > g_1 = 1$



1 catena di lungh. 2

$\rightarrow \ker(F - \lambda_1 I)$

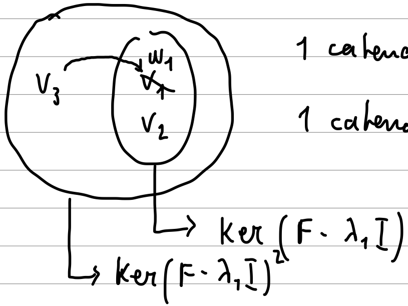
$\rightarrow \ker(F - \lambda_1 I)^2$

$$F_J = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 5 & 0 \\ & & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$F_J' = \left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & & \\ 0 & 5 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(ii) $F: \quad \lambda_1 = 2, \quad \nu_1 = 3, \quad g_1 = 2$

$$F_J = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

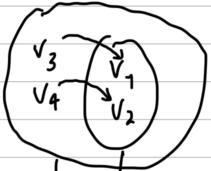


1 catena di l. 2

1 catena di l. 1

(iii) $F: \quad \lambda_1 = 5, \quad \nu_1 = 4, \quad g_1 = 2$

$$\bar{F}_J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & \\ 0 & 5 & & \\ & & 5 & 1 \\ & & 0 & 5 \end{bmatrix}$$



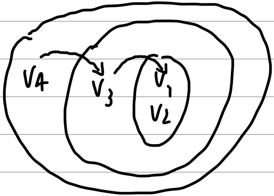
2 catene di l. 2

$\ker(F - \lambda_1 I)$

$\bar{F}_J$? $\updownarrow$

$\ker(F - \lambda_1 I)^2 \to \dim 4$

$$F_J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & \\ 0 & 5 & 1 & \\ 0 & 0 & 5 & \\ & & & 5 \end{bmatrix}$$



2 catene: 1 l. 3

1 l. 1

Polinomio annullatore di una matrice

extra

$$p(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_\ell)^{\alpha_\ell} \implies p(F) = (F - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (F - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$$

Analizziamo un miniblocco: $p(J_{\lambda_{i,j}}) = (J_{\lambda_{i,j}} - x_1 I)^{\alpha_1} \cdots (J_{\lambda_{i,j}} - x_\ell I)^{\alpha_\ell}$

Per avere $p(F) = 0$:

- $p(\lambda_i) = 0$, per ogni autovalore λ_i di F
- $\alpha_i \geq$ dimensione del più grande miniblocco associato a λ_i

back

$$J_{\lambda_{i,j}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$p(J_{\lambda_{i,j}}) = \underbrace{(J_{\lambda_{i,j}} - x_1 I)}^{\alpha_1} \cdots \underbrace{(J_{\lambda_{i,j}} - x_\ell I)}^{\alpha_\ell}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i - x_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i - x_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i - x_1 \end{bmatrix}^{\alpha_1} \cdots \begin{bmatrix} \lambda_i - x_\ell & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i - x_\ell & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i - x_\ell \end{bmatrix}^{\alpha_\ell}}$$

$x_j \neq \lambda_i \quad j = 1, \dots, \ell$

back

$$p(F)=0 \implies \{\lambda_i\}_{i=1}^{k} \subseteq \{x_i\}_{i=1}^{\ell}$$

$$\lambda_i = x_1$$

$$p(J_{\lambda_{i,j}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}^{\alpha_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i - x_2 & 1 & \\ & \lambda_i - x_2 & 1 \\ & & \lambda_i - x_2 \end{bmatrix}^{\alpha_2}}_{\text{inv.}} \cdots \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i - x_\ell & 1 & \\ & \lambda_i - x_\ell & 1 \\ & & \lambda_i - x_\ell \end{bmatrix}^{\alpha_\ell}}_{\text{inv.}}$$

$$= 0$$

$$\implies \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}^{\alpha_1} = 0 \implies \alpha_1 \geq 3$$