Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Richiami di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

noi siamo qui

concetto di sistema

sistemi in spazio di stato

equilibri e linearizzazione

soluzioni e analisi modale

stabilità (cenni)

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

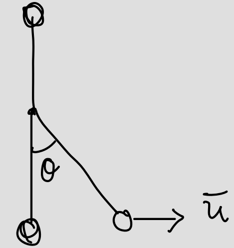
osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

FINISH

Nella scorsa lezione



$F\bar{x} = -G\bar{u}$

$\theta = 0, \pi$

- Traiettorie di stato di un sistema
- Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

t.c.
$\bar{x}$ eq. $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

t.d.
$\bar{x}$ eq. $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$

In questa lezione

- Fatti base su vettori e trasformazioni lineari
- Fatti base su matrici

Vettori e basi in $\mathbb{R}^n$

$V = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$

1. L'insieme (di vettori) $\mathbb{R}^n$ con campo (di scalari) $\mathbb{R}$ dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (dipendenti) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\not\Rightarrow)\ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ se:

(i) generano $\mathcal{V}$: $\forall v \in \mathcal{V}$, $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ $(\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \mathcal{V})$

$\downarrow$ spazio generato

(ii) sono linearmente indipendenti

Esempio: (in)dipendenza lineare

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_1,\ v_2,\ v_3 \text{ linearmente indipendenti?}$$

note

Esempio: (in)dipendenza lineare

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v_1,\, v_2,\, v_3 \text{ linearmente indipendenti?}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \implies v_1,\, v_2,\, v_3 \text{ lin. indip.} \checkmark$$

note

Esempio: basi

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{base di } \mathcal{V} = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}?$$

note

Esempio: basi

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\qquad \text{base di } \mathcal{V} = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}?$$

$$\mathcal{B} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$ (**N.B.** scelta generatori della base non unica!)

note

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

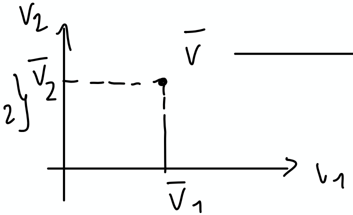
2. Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è univocamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^m$.

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

1. Fissata una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^m$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$ è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ che descrive come le coordinate (rispetto a $\mathcal{B}_1$) di vettori di $\mathbb{R}^m$ vengono mappate da f in coordinate di vettori (rispetto a $\mathcal{B}_2$) di $\mathbb{R}^n$.

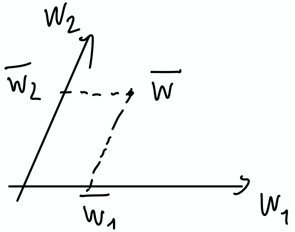
$n=2$ $\mathbb{R}^2$

$B_1 = \{v_1, v_2\}$



$$\bar{w} = f(\bar{v})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$$



$m = 2$

$B_2 = \{w_1, w_2\}$

2. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ad una "nuova" base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1} F T. \longrightarrow \text{operazione di cambio base}$$

In questa lezione

- Fatti base su vettori e trasformazioni lineari
- Fatti base su matrici

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\text{nucleo di } F = \ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m \; : \; Fv = 0\}$$

$$\text{immagine di } F = \operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \; : \; w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m\}$$

$$\text{rango di } F = \operatorname{rank} F \triangleq \# \text{ righe (o colonne) lin. indipendenti di } F = \dim \operatorname{im} F$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\text{nucleo di } F = \ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m \ : \ Fv = 0\}$$

$$\text{immagine di } F = \operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \ : \ w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m\}$$

$$\text{rango di } F = \operatorname{rank} F \triangleq \# \text{ righe (o colonne) lin. indipendenti di } F = \dim \operatorname{im} F$$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ.

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\text{nucleo di } F = \ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m \ : \ Fv = 0\}$$

$$\text{immagine di } F = \operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \ : \ w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m\}$$

$$\text{rango di } F = \operatorname{rank} F \triangleq \# \text{ righe (o colonne) lin. indipendenti di } F = \dim \operatorname{im} F$$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ.

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$\det(F - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - F)$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i.

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soddisfa

$$(\lambda_i I - F)v = 0. \qquad v \in \underbrace{\mathrm{Ker}\,(\lambda_i I - F)}_{\text{autospazio relativo all'autovalore } \lambda_i}$$

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soddisfa

$$(\lambda_i I - F)v = 0.$$

5. La molteplicità geometrica g_i dell'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente independenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim\ker(\lambda_i I - F) \underset{\Downarrow}{=} n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - F). \qquad (1 \le g_i \le \nu_i)$$

$\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = n \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soddisfa

$$(\lambda_i I - F)v = 0.$$

5. La molteplicità geometrica g_i dell'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente independenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim\ker(\lambda_i I - F) = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - F). \qquad (1 \le g_i \le \nu_i)$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ allora F è diagonalizzabile, cioè, esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

T ha come colonne gli autovettori di F

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

ha sulla diagonale gli autovalori di F

Esempio: rango, nucleo, immagine

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \ker F? \ \operatorname{im} F? \ \operatorname{rank} F?$$

note

Esempio: rango, nucleo, immagine

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \ker F? \;\; \mathrm{im}\, F? \;\; \mathrm{rank}\; F?$$

$$\ker F = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathrm{im}\; F = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathrm{rank}\; F = 2$$

note

Esempio: autovalori/autovettori, diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F \text{ diagonalizzabile?} \qquad \text{Se sì, calcolare } T.$$

note

Esempio: autovalori/autovettori, diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F \text{ diagonalizzabile?} \qquad \text{Se sì, calcolare } T.$$

$$\lambda_1 = i,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = -i,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile } \checkmark$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

note

Esempi: diagonalizzabilità

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

note

Esempi: diagonalizzabilità

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

$\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Richiami di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio: (in)dipendenza lineare

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1, v_2, v_3 \text{ linearmente indipendenti?}$$

note

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0 \implies \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ -2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\cancel{\alpha_2} + \cancel{\alpha_2} - \alpha_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\implies$ unica soluzione $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\implies$ V_1, V_2, V_3 sono lin. indipendenti

Esempio: basi

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},$$ base di $\mathcal{V} = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$?

1) $v_3 = \frac{3}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 = \begin{bmatrix}3/2\\3/2\\3/2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \longrightarrow \mathcal{B} = \text{span}\{v_1, v_2\}$

2) Metodo sistematico: Procedimento di eliminazione Gaussiana

$A = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{bmatrix} \longrightarrow$ portare A in forma a scala tramite trasf. elementari:

1) $H_{ij}(r)$: somma a riga i, riga j moltiplicata per r

2) H_{ij}: scambiare le righe i, j

3) $H_{ii}(r)$: moltiplica la riga i per r

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \mathcal{B} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix} \right\}$$

Esempio: rango, nucleo, immagine

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \ker F? \ \text{im}\, F? \ \text{rank}\, F?$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Ker F ? $\quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$v \in \ker F \longrightarrow Fv = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 - 2v_2 = 0 \\ -2v_1 + 4v_2 = 0 \\ v_1 + 3v_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2 = v_1/2 \\ -2\cancel{v_1} + 2\cancel{v_1} = 0 \\ v_3 = -\frac{1}{3} v_1 \end{cases} \qquad v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha/2 \\ -\alpha/3 \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow \ker F = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix} \right\}$$

2) im F ?

$$\text{im}\, F = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \qquad v_2 = -2v_1 + \frac{1}{3} v_3$$

$$F^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{21}(2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-3/2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{im}\, F = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

3) $\text{rank}\, F = \dim \text{im}\, F = 2$

Esempio: autovalori/autovettori, diagonalizzazione

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, F diagonalizzabile? Se sì, calcolare T.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

autovalori di F: $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$

$\downarrow$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

F diagonalizzabile $\longleftarrow$ $\nu_1 = 1 = g_1$, $\nu_2 = 1 = g_2$

autovettori di F:

1) autovettore relativo a $\lambda_1 = +i$: $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$(\lambda_1 I - F) v = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} i v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 + i v_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = i v_1 \\ \text{''} \end{cases}$$

$v = \begin{bmatrix} \alpha \\ i\alpha \end{bmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

2) autovettore relativo a $\lambda_2 = -i$: $(\lambda_2 I - F) v = 0$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -i v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - i v_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = -i v_1 \\ \text{''} \end{cases} \quad v = \begin{bmatrix} \alpha \\ -i\alpha \end{bmatrix} \alpha \in \mathbb{R}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \longrightarrow \text{cambio base che diagonalizza } F$$

$$T^{-1} F T = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Esempi: diagonalizzabilità

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

note

1) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \longrightarrow$ F diagonalizzabile

2) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

$= (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} - \cancel{1}$

$= \lambda(\lambda - 2)$

F diagonaliz. $\longleftarrow$ $\lambda_1 = 0 \quad \nu_1 = 1 = g_1$
$\lambda_2 = 2 \quad \nu_2 = 1 = g_2$

3) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 \quad \lambda_1 = 1 \quad \nu_1 = 2$

$g_1 = 2 - \operatorname{rank}(\lambda_1 I - F) = 2 - \underbrace{\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{1} = 1 < \nu_1$

$\longrightarrow$ F non diagonalizzabile!