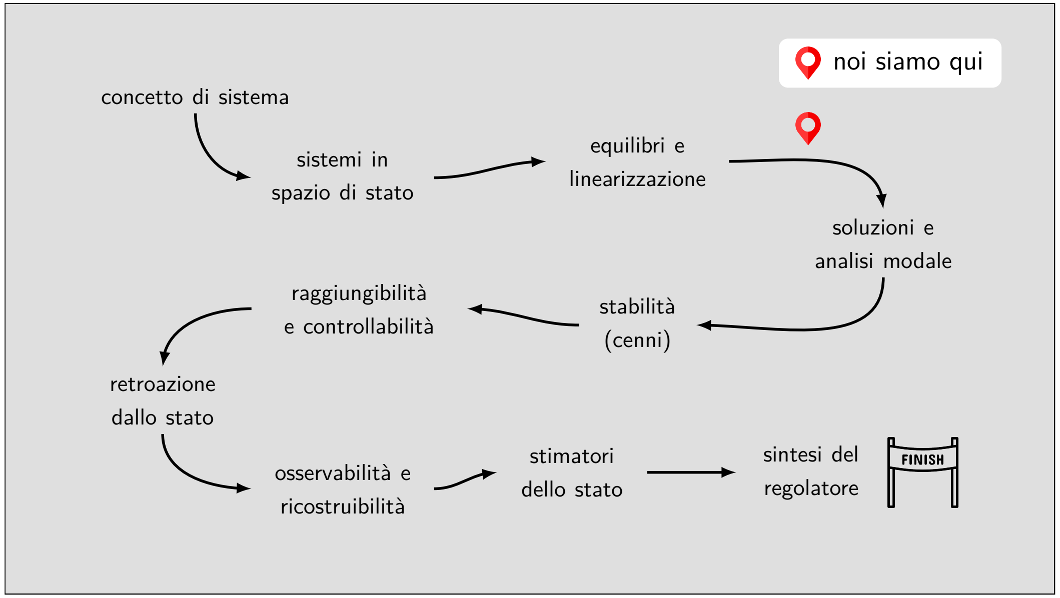
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Richiami di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



In questa lezione

▷ Fatti base su vettori e trasformazioni lineari

▷ Fatti base su matrici

Vettori e basi in $\mathbb{R}^n$

1. L'insieme (di vettori) $\mathbb{R}^n$ con campo (di scalari) $\mathbb{R}$ dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (dipendenti) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0,\ \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\not\Rightarrow)\ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ se:

(i) generano $\mathcal{V}$: $\forall v \in \mathcal{V}$, $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ $\quad (\text{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathcal{V})$

(ii) sono linearmente indipendenti

Esempio: (in)dipendenza lineare

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \quad v_1,\ v_2,\ v_3 \text{ linearmente indipendenti?}$$

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 = 0\\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0\\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0\end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \implies v_1,\ v_2,\ v_3 \text{ lin. indip.} \checkmark$$

Esempio: basi

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}, \quad \text{base di } \mathcal{V} = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}?$$

$$\mathcal{B} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}\right\}$$ (**N.B.** scelta generatori della base non unica!)

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2. Una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è univocamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^m$.

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

1. Fissata una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^m$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$ è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$ che descrive come le coordinate (rispetto a $\mathcal{B}_1$) di vettori di $\mathbb{R}^m$ vengono mappate da f in coordinate di vettori (rispetto a $\mathcal{B}_2$) di $\mathbb{R}^n$.

2. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ad una "nuova" base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT.$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\text{nucleo di } F = \ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m : Fv = 0\}$$

$$\text{immagine di } F = \operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n : w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m\}$$

$$\text{rango di } F = \operatorname{rank} F \triangleq \#\text{ righe (o colonne) lin. indipendenti di } F = \dim \operatorname{im} F$$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ.

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i.

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soddisfa

$$(\lambda_i I - F)v = 0.$$

5. La molteplicità geometrica g_i dell'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente independenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim \ker(\lambda_i I - F) = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - F). \qquad (1 \le g_i \le \nu_i)$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ allora F è diagonalizzabile, cioè, esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

Esempio: rango, nucleo, immagine

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \ker F?\ \operatorname{im} F?\ \operatorname{rank}\ F?$$

$$\ker\ F = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix}\right\}, \quad \operatorname{im}\ F = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}, \quad \operatorname{rank}\ F = 2$$

Esempio: autovalori/autovettori, diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F \text{ diagonalizzabile?} \quad \text{Se sì, calcolare } T.$$

$$\lambda_1 = i,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = -i,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile} \ \checkmark$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Esempi: diagonalizzabilità

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

   $\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗