

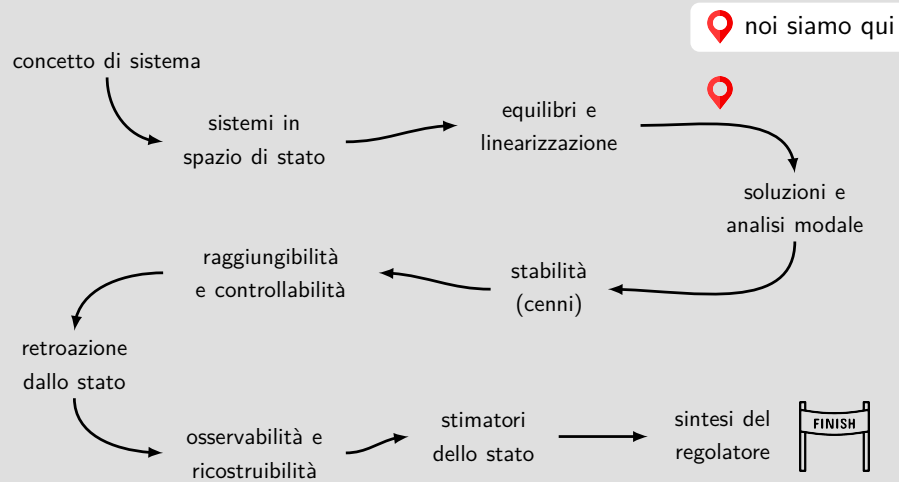
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Richiami di algebra lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



Esempio: (in) dipendenza lineare

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1, v_2, v_3 \text{ linearmente indipendenti?}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \implies v_1, v_2, v_3 \text{ lin. indep. } \checkmark$$

Esempio: basi

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{base di } \mathcal{V} = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}?$$

$$\mathcal{B} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (\mathbf{N.B.} \text{ scelta generatori della base non unica!})$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

nucleo di $F = \ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m : Fv = 0\}$

immagine di $F = \operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n : w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m\}$

rango di $F = \operatorname{rank} F \triangleq \#$ righe (o colonne) lin. indipendenti di $F = \dim \operatorname{im} F$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ .

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i .

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soddisfa

$$(\lambda_i I - F)v = 0.$$

5. La molteplicità geometrica g_i dell'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente indipendenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim \ker(\lambda_i I - F) = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - F). \quad (1 \leq g_i \leq \nu_i)$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora F è diagonalizzabile, cioè, esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$
