Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Richiami di algebra lineare e forma di Jordan

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- Soluzioni di un sistema autonomo
- Esponenziale di matrice $e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k$
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

In questa lezione

- Richiami di algebra lineare e diagonalizzazione di matrici
- Calcolo dell'esponenziale di matrice tramite diagonalizzazione
- Forma di Jordan

Vettori e basi in $\mathbb{R}^n$

$V = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$

1. L'insieme (di vettori) $\mathbb{R}^n$ con campo (di scalari) $\mathbb{R}$ dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (dipendenti) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0, \ \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\not\Rightarrow) \ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se:

(i) generano $\mathbb{R}^n$: $\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$

(ii) sono linearmente indipendenti

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

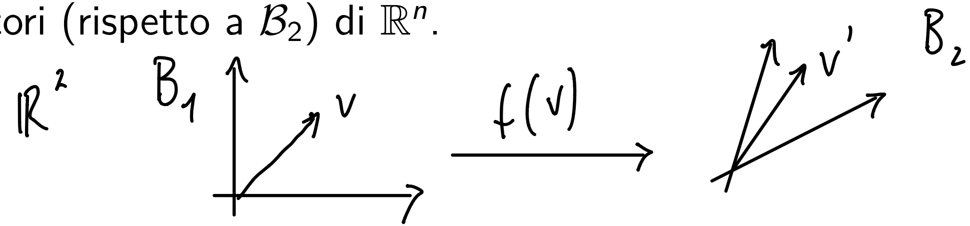
(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2. Una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è univocamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^m$.

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

1. Fissata una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^m$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$ è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$ che descrive come le coordinate (rispetto a $\mathcal{B}_1$) di vettori di $\mathbb{R}^m$ vengono mappate da f in coordinate di vettori (rispetto a $\mathcal{B}_2$) di $\mathbb{R}^n$.



$v' = Fv$
$\downarrow$
$\mathbb{R}^{2\times 2}$

2. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ad una "nuova" base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT.$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m \;:\; Fv = 0\}, \quad \text{(nucleo)}$$

$$\operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \;:\; w = \underline{Fv}, \exists v \in \mathbb{R}^m\}, \quad \text{(immagine)}$$

$$\operatorname{rank} F \triangleq \#\ \text{righe (o colonne) lin. indipendenti di } F \quad \text{(rango)}$$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ.

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = (\lambda - \underline{\lambda_1})^{\nu_1}(\lambda - \underline{\lambda_2})^{\nu_2}\cdots(\lambda - \underline{\lambda_k})^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i.

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soddisfa

$$\underline{(\lambda_i I - F)v = 0.}$$

5. La molteplicità geometrica g_i dell'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente independenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim \ker(\lambda_i I - F) = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - F).$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora F è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1} F T \text{ è diagonale.}$$

F_D avrà sulla diagonale gli autovalori di F

T ha per colonne gli autovettori di F

Esempio: diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F \text{ diagonalizzabile?} \qquad \text{Se sì, calcolare } T.$$

$$\lambda_1 = i,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = -i,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile} \quad \checkmark$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

note

In questa lezione

- Richiami di algebra lineare e diagonalizzazione di matrici
- Calcolo dell'esponenziale di matrice tramite diagonalizzazione
- Forma di Jordan

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizzabile $\quad (\nu_i = g_i$ per ogni autovalore $\lambda_i)$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizzabile $\quad (\nu_i = g_i$ per ogni autovalore $\lambda_i)$

$$\Downarrow$$

Esiste $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $F_D = T^{-1}FT$ diagonale

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ diagonalizzabile} \quad (\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$$

$$\Big\downarrow$$

$$\text{Esiste } T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ tale che } F_D = T^{-1} F T \text{ diagonale}$$

$$\boxed{\text{Come ci aiuta questo nel calcolo di } e^{Ft}\text{?}}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ diagonalizzabile} \quad (\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$$

$F_D = T^{-1} F T \implies$

$$F = T F_D T^{-1} \implies e^{Ft} = e^{T F_D T^{-1} t}$$

$$(T F_D T^{-1} t)^n = T (F_D t)^n T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{calcolare } e^{Ft} \text{ tramite diagonalizzazione di } F.$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \; F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = Te^{F_D t}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

note

In questa lezione

- Richiami di algebra lineare e diagonalizzazione di matrici
- Calcolo dell'esponenziale di matrice tramite diagonalizzazione
- Forma di Jordan

Come calcolare e^{Ft}?

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\big\downarrow$$

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Come calcolare e^{Ft}?

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Big\downarrow$$

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T?

Come calcolare e^{Ft}?

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\downarrow$$

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T?

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ "quasi" diagonale!

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

note

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

$\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$\downarrow$

possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

...e i blocchi "quasi" diagonali hanno una forma ben nota !!

$$\begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix}$$

Forma di Jordan: teorema

Teorema: Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ gli autovalori di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Esiste una $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$F_J \triangleq T^{-1}FT = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right], \; J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array}\right], \; J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}}.$$

Inoltre F_J è unica a meno di permutazioni dei blocchi $\{J_{\lambda_i}\}$ e miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$.

$$\boxed{F_J = \text{forma canonica di Jordan di } F}$$

Forma di Jordan: osservazioni

1. Esiste una procedura algoritmica per il calcolo della trasformazione T (cf. §1.5-1.6 del testo di riferimento)

2. dim. blocco J_{λ_i} associato a λ_i = molteplicità algebrica ν_i

3. $\#$ miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$ associati a λ_i = molteplicità geometrica g_i

4. In generale, per determinare F_J non è sufficiente conoscere gli autovalori $\{\lambda_i\}$ e i valori di $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$, ma bisogna anche conoscere i valori di $\{r_{ij}\}$!

5. **Se $g_i = 1\ \forall i$ o se $n = 1, 2, 3$ si può ricavare F_J calcolando solo $\{\lambda_i\}$, $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$!**

Forma di Jordan: esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \alpha = 0, 1$

note

Forma di Jordan: esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \begin{matrix} \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1 \end{matrix} \implies F_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Matlab: jordan(F) = [T, D]

T: cambio di base

D: forma di Jordan

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \alpha = 0, 1 \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 4,\ g_1 = 2$

$$\implies F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Richiami di algebra lineare e forma di Jordan

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio: diagonalizzazione

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, F diagonalizzabile? Se sì, calcolare T.

$\lambda_1 = i$, $\nu_1 = 1$, $g_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\nu_2 = 1$, $g_2 = 1 \implies F$ diagonalizzabile ✓

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

note

G. Baggio Lez. 5: Richiami di algebra lineare e forma di Jordan 8 Marzo 2021

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ F diagonalizzabile?

Calcolo autovalori:

$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = +i & \nu_1 = 1 = g_1 \qquad 1 \leq g_i \leq \nu_i \\ \lambda_2 = -i & \nu_2 = 1 = g_2 \end{array}\right\} \implies F \text{ è diagonalizzabile}$$

Calcolo autovettori:

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ autovettore relativo a $\lambda_1 = +i$:

$(\lambda_1 I - F) v = 0 \qquad \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} iv_1 - v_2 = 0 \\ v_1 + iv_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = iv_1 \\ \text{"} \end{cases} \rightarrow v = \begin{bmatrix} \alpha \\ i\alpha \end{bmatrix} \ \alpha \in \mathbb{R}$

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ autovettore relativo a $\lambda_2 = -i$:

$(\lambda_2 I - F) v = 0 \qquad \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} -iv_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - iv_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = -iv_1 \\ \text{"} \end{cases} \rightarrow v = \begin{bmatrix} \alpha \\ -i\alpha \end{bmatrix} \ \alpha \in \mathbb{R}$

Matrice di cambio base: $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \qquad T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$\alpha = 1$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcolare e^{Ft} tramite diagonalizzazione di F.

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$, $F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$e^{Ft} = Te^{F_D t}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

note

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \qquad F_D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Inversa matrice 2x2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2i}\begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = e^{TF_DT^{-1}t} = Te^{F_Dt}T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{it}+e^{-it} & -ie^{it}+ie^{-it} \\ ie^{it}-ie^{-it} & e^{it}+e^{-it} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} & \frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right) \\ \frac{1}{2i}\left(-e^{it}+e^{-it}\right) & \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Formule di Eulero:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

note

1) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$ $\nu_1 = 2 = g_1$ diagonalizzabile

2) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + \cancel{1} - \cancel{1}$

$= \lambda(\lambda - 2)$

$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & \nu_1 = 1 = g_1 \\ \lambda_2 = 2 & \nu_2 = 1 = g_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ diagonalizzabile

3) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1$ $\nu_1 = 2$

$g_1 = 2 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 2 - \underbrace{\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{1} = 2 - 1 = 1$

$\nu_1 > g_1 \Rightarrow$ non diagonalizzabile

Forma di Jordan: esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha = 0, 1$

1) $F = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$

$\lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22})$

$$\Delta_{F_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{11}) = \det \begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)+1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$$

Autovalori di F: $\lambda_1 = 2 \quad \nu_1 = 3$

$$g_1 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$F_J \longrightarrow g_1 = 2$ miniblocchi relativi a $\lambda_1 = 2$ $\rightarrow$ 1 miniblocco 2x2
$\rightarrow$ 1 miniblocco 1x1

$$F_J = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

2) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\alpha = 0, 1$

$\lambda_1 = 1 \qquad \nu_1 = 4$

$$g_1 = 4 - \text{rank}(I - F) = 4 - \underbrace{\text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{2} = 2$$

$F_J \rightarrow g_1 = 2$ miniblocchi relativi a $\lambda_1 = 1$ → 2 miniblocchi 2×2 ; → 1 miniblocco 3×3, 1 miniblocco 1×1

$$F_J = \begin{cases} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \alpha = 0 \\[2ex] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \alpha = 1 \end{cases}$$