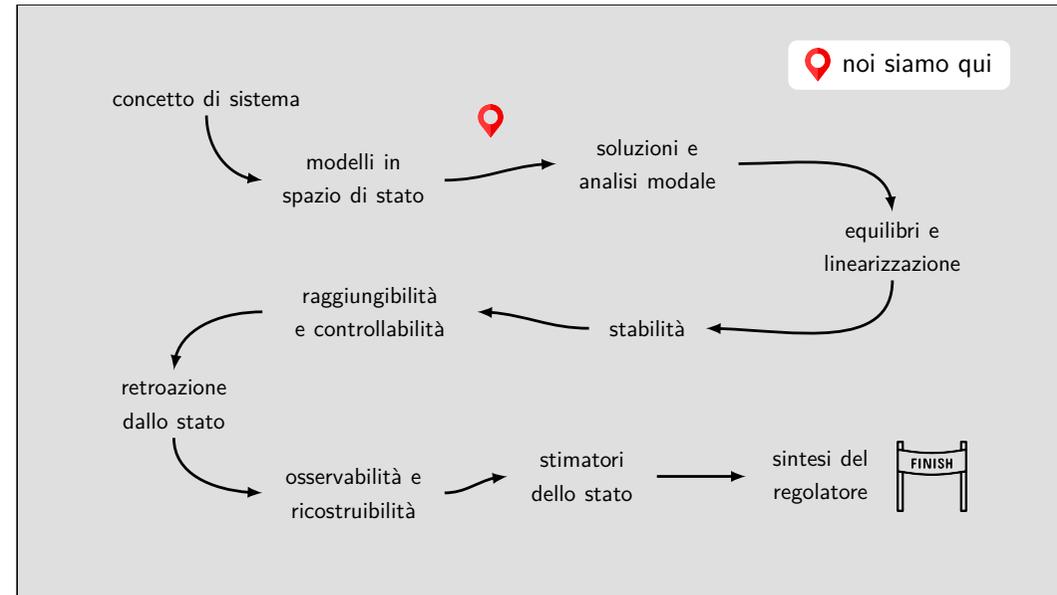


Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Richiami di algebra lineare e forma di Jordan

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica
A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Richiami di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice tramite diagonalizzazione
- ▷ Forma di Jordan

Vettori e basi in \mathbb{R}^n

1. L'insieme (di vettori) \mathbb{R}^n con campo (di scalari) \mathbb{R} dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (**dipendenti**) se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0, \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\neq) \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base di \mathbb{R}^n se:

- (i) generano \mathbb{R}^n : $\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$
- (ii) sono linearmente indipendenti

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

$$(i) f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$$

$$(ii) f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è univocamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una qualsiasi base \mathcal{B} di \mathbb{R}^m .

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

1. Fissata una base \mathcal{B}_1 di \mathbb{R}^m e una base \mathcal{B}_2 di \mathbb{R}^n è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ che descrive come le coordinate (rispetto a \mathcal{B}_1) di vettori di \mathbb{R}^m vengono mappate da f in coordinate di vettori (rispetto a \mathcal{B}_2) di \mathbb{R}^n .

2. Fissata una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^n , sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice di cambio di base da \mathcal{B} di \mathbb{R}^n ad una "nuova" base \mathcal{B}' di \mathbb{R}^n . La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT.$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m : Fv = 0\},$$

$$\text{im } F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n : w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m\},$$

$\text{rank } F \triangleq \#$ righe (o colonne) lin. indipendenti di F

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ .

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i .

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ soddisfa

$$(\lambda_i I - F)v = 0.$$

5. La molteplicità geometrica g_i dell'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente indipendenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim \ker(\lambda_i I - F) = n - \text{rank}(\lambda_i I - F).$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora F è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

Esempio: diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F \text{ diagonalizzabile?} \quad \text{Se s\`i, calcolare } T.$$

$$\lambda_1 = i, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = -i, \nu_2 = 1, g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile} \quad \checkmark$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ diagonalizzabile} \quad (\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$$



$$\text{Esiste } T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ tale che } F_D = T^{-1}FT \text{ diagonale}$$

Come ci aiuta questo nel calcolo di e^{Ft} ?

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$$F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ diagonalizzabile} \quad (\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$$

$$F = TF_D T^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_D T^{-1}t}$$

$$(TF_D T^{-1}t)^n = T(F_D t)^n T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{calcolare } e^{Ft} \text{ tramite diagonalizzazione di } F.$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} ?

Calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$



Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T ?

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ "quasi" diagonale!

Esempi

$$1. F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1 \text{ diagonalizzabile } \checkmark$$

$$2. F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = 0, \nu_2 = 1, g_2 = 1 \\ \implies \nu_i = g_i \text{ diagonalizzabile } \checkmark$$

$$3. F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1 \text{ non diagonalizzabile! } \times$$

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile \checkmark

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile \times



possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

...e i blocchi "quasi" diagonali hanno una forma ben nota !!

$$\begin{bmatrix} f & 1 & \dots & 0 \\ 0 & f & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & f & 1 \\ 0 & \dots & 0 & f \end{bmatrix}$$

Forma di Jordan: teorema

Teorema: Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ gli autovalori di $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Esiste una $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$F_J \triangleq T^{-1}FT = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}, J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i,2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{bmatrix}, J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij} \times r_{ij}}$$

Inoltre F_J è unica a meno di permutazioni dei blocchi $\{J_{\lambda_i}\}$ e miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$.

$F_J =$ forma canonica di Jordan di F

Forma di Jordan: osservazioni

1. Esiste una procedura algoritmica per il calcolo della trasformazione T (cf. §1.5-1.6 del testo di riferimento)
2. dim. blocco J_{λ_i} associato a $\lambda_i =$ molteplicità algebrica ν_i
3. # miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$ associati a $\lambda_i =$ molteplicità geometrica g_i
4. In generale, per determinare F_J non è sufficiente conoscere gli autovalori $\{\lambda_i\}$ e i valori di $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$, ma bisogna anche conoscere i valori di $\{r_{ij}\}$!
5. **Se $g_i = 1 \forall i$ o se $n = 1, 2, 3$ si può ricavare F_J calcolando solo $\{\lambda_i\}$, $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$!**

Forma di Jordan: esempi

$$1. F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 2, \nu_1 = 2, g_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1, \nu_2 = 1, g_2 = 1 \end{array} \Rightarrow F_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \alpha = 0, 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \nu_1 = 4, g_1 = 2$$
$$\Rightarrow F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 1 \end{cases}$$