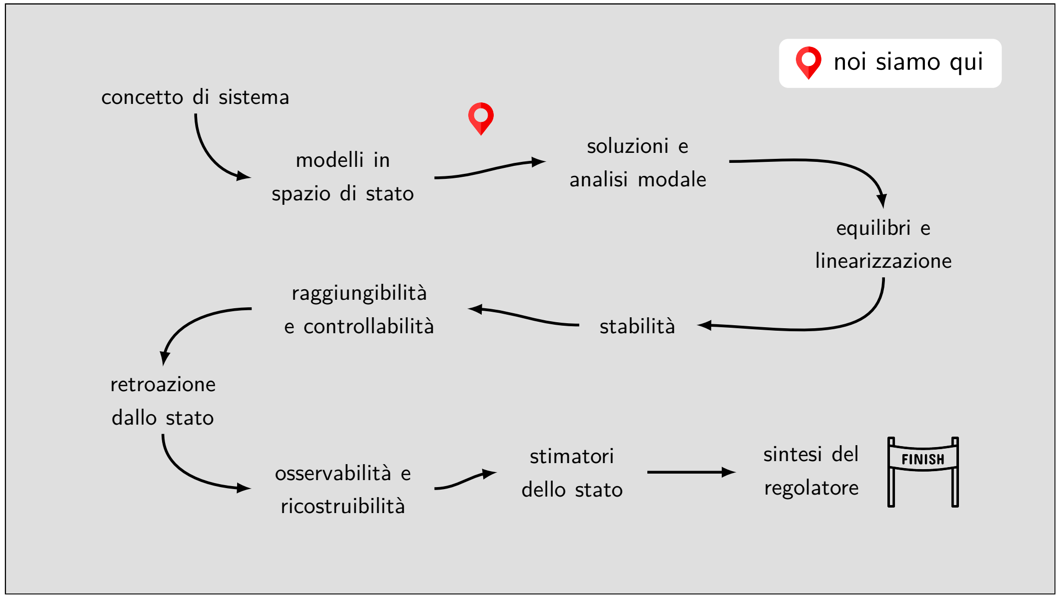
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 5: Richiami di algebra lineare e forma di Jordan

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Richiami di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice tramite diagonalizzazione
- ▷ Forma di Jordan

Vettori e basi in $\mathbb{R}^n$

1. L'insieme (di vettori) $\mathbb{R}^n$ con campo (di scalari) $\mathbb{R}$ dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (dipendenti) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0,\ \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\not\Rightarrow)\ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se:

(i) generano $\mathbb{R}^n$: $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$

(ii) sono linearmente indipendenti

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$

(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2. Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è univocamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una qualsiasi base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^m$.

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

1. Fissata una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^m$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$ è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$ che descrive come le coordinate (rispetto a $\mathcal{B}_1$) di vettori di $\mathbb{R}^m$ vengono mappate da f in coordinate di vettori (rispetto a $\mathcal{B}_2$) di $\mathbb{R}^n$.

2. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ad una "nuova" base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1} F T.$$

Matrici: fatti base

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m \,:\, Fv = 0\},$$

$$\operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n \,:\, w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m\},$$

$$\operatorname{rank} F \triangleq \#\ \text{righe (o colonne) lin. indipendenti di } F$$

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ.

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i.

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soddisfa

$$(\lambda_i I - F)v = 0.$$

5. La molteplicità geometrica g_i dell'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente independenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim\ker(\lambda_i I - F) = n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - F).$$

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ allora F è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

Esempio: diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F \text{ diagonalizzabile?} \quad \text{Se sì, calcolare } T.$$

$\lambda_1 = i$, $\nu_1 = 1$, $g_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\nu_2 = 1$, $g_2 = 1 \implies F$ diagonalizzabile ✓

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile $(\nu_i = g_i$ per ogni autovalore $\lambda_i)$

$\downarrow$

Esiste $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $F_D = T^{-1} F T$ diagonale

Come ci aiuta questo nel calcolo di e^{Ft}?

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizzabile $\quad (\nu_i = g_i$ per ogni autovalore $\lambda_i)$

$$F = TF_DT^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_DT^{-1}t}$$

$$(TF_DT^{-1}t)^n = T(F_Dt)^nT^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_Dt}T^{-1}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcolare e^{Ft} tramite diagonalizzazione di F.

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$, $F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$$e^{Ft} = Te^{F_Dt}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}?

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\downarrow$

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T?

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $T^{-1}FT$ “quasi” diagonale!

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

$\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

...e i blocchi "quasi" diagonali hanno una forma ben nota !!

$$\begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix}$$

Forma di Jordan: teorema

Teorema: Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ gli autovalori di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Esiste una $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$F_J \triangleq T^{-1}FT = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_k} \end{array}\right], J_{\lambda_i} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} J_{\lambda_i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & J_{\lambda_i,2} & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & J_{\lambda_i,g_i} \end{array}\right], J_{\lambda_i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_{ij}\times r_{ij}}.$$

Inoltre F_J è unica a meno di permutazioni dei blocchi $\{J_{\lambda_i}\}$ e miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$.

$$\boxed{F_J = \text{forma canonica di Jordan di } F}$$

Forma di Jordan: osservazioni

1. Esiste una procedura algoritmica per il calcolo della trasformazione T (cf. §1.5-1.6 del testo di riferimento)
2. dim. blocco J_{λ_i} associato a λ_i = molteplicità algebrica ν_i
3. # miniblocchi $\{J_{\lambda_i,j}\}$ associati a λ_i = molteplicità geometrica g_i
4. In generale, per determinare F_J non è sufficiente conoscere gli autovalori $\{\lambda_i\}$ e i valori di $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$, ma bisogna anche conoscere i valori di $\{r_{ij}\}$!
5. **Se $g_i = 1\ \forall i$ o se $n = 1, 2, 3$ si può ricavare F_J calcolando solo $\{\lambda_i\}$, $\{\nu_i\}$, $\{g_i\}$!**

Forma di Jordan: esempi

1. $$F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies \begin{array}{l} \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1 \end{array} \implies F_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. $$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \alpha = 0, 1 \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 4,\ g_1 = 2$$

$$\implies F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \alpha = 1 \end{cases}$$