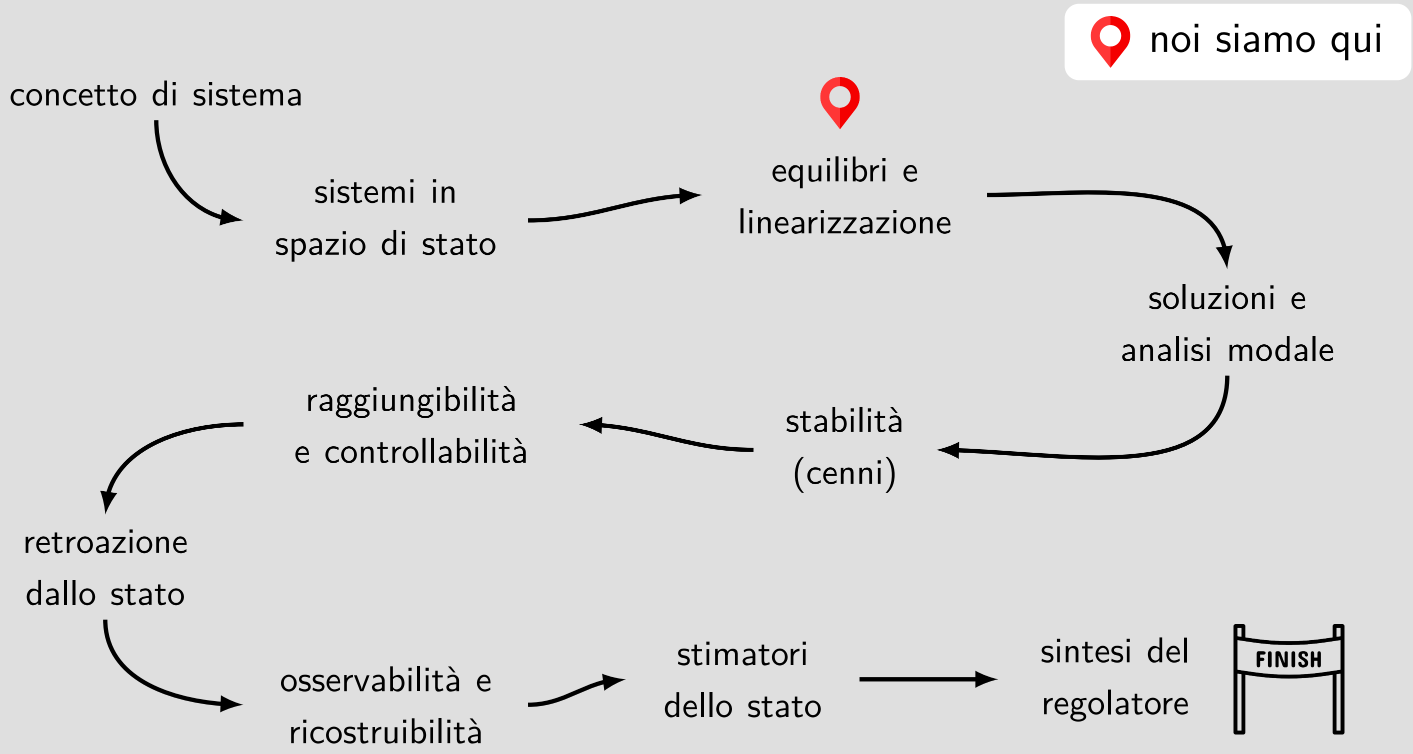
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 4: Equilibri, stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- Esempi di modelli di stato lineari
- Funzione di trasferimento $\rightarrow$ spazio di stato
- Esempi di modelli di stato non lineari

In questa lezione

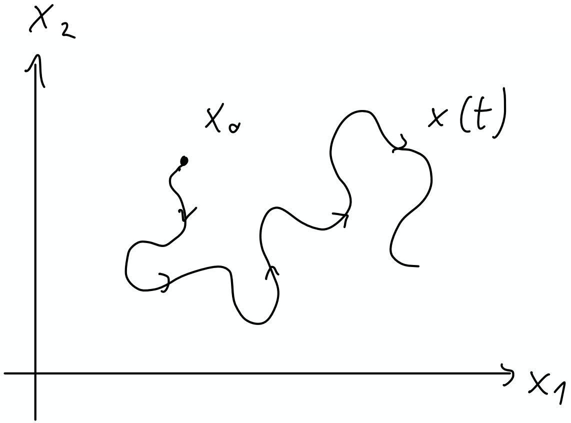
- Traiettorie di stato di un sistema
- Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

Traiettorie di stato e ritratto di fase

autonomi

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t)), \; t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$



Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$: $\{x(t) \in \mathbb{R}^n, \; t \geq 0\}$

Ritratto di fase del sistema = insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Traiettorie di stato e ritratto di fase: esempi

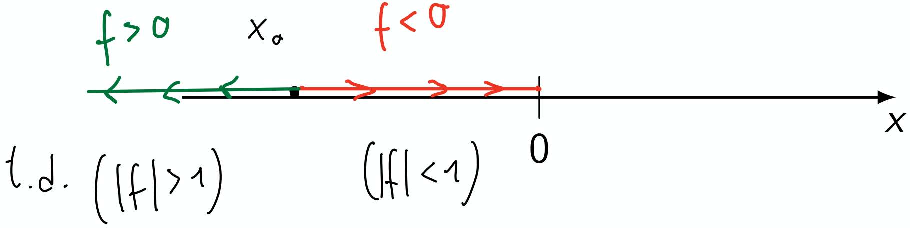
Sistema lineare tempo invariante scalare ($f \in \mathbb{R}$):

$$\dot{x}(t) = fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 \qquad \text{(t.c.)}$$

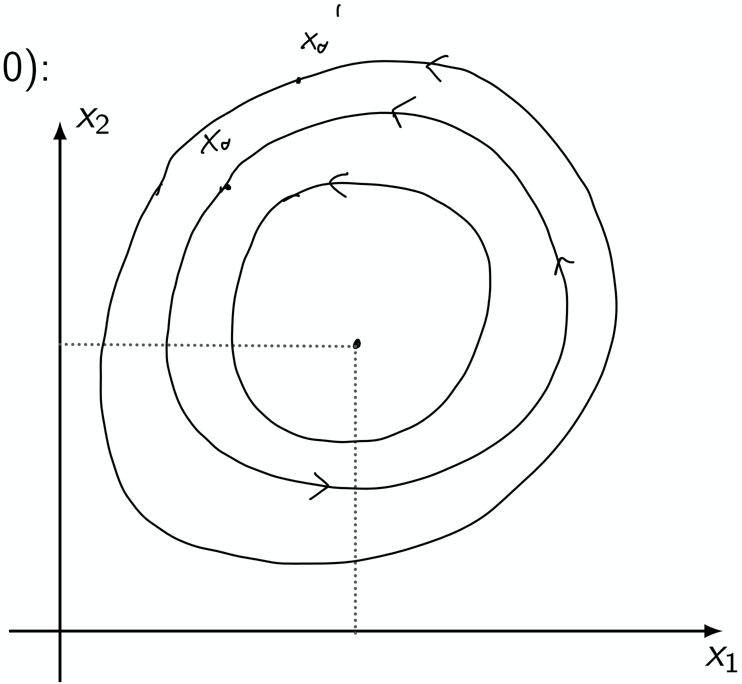
$$x(t) = f^{t}x_0 \qquad \text{(t.d.)}$$



Traiettorie di stato e ritratto di fase: esempi

Dinamica preda-predatore $(\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \gamma x_1(t) x_2(t) - \delta x_2(t) \end{cases}$$



In questa lezione

- Traiettorie di stato di un sistema
- Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \longrightarrow \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\dot{x} = Fx, \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n}: \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \longrightarrow F\bar{x} = 0 \longrightarrow \bar{x} \in \operatorname{Ker} F$$

$$\operatorname{Ker} F = \{v \in \mathbb{R}^n : Fv = 0\}$$

$$x(t+1) = Fx(t): \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ eq.} \longrightarrow \bar{x} = F\bar{x}$$

$$(F - I)\bar{x} = 0 \longrightarrow \bar{x} \in \operatorname{Ker}(F - I)$$

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{(t.c.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio } \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{(t.d.)} \qquad \bar{x} \text{ equilibrio } \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Caso lineare: $\bar{x}$ equilibrio $\iff$

$$\bar{x} \in \ker F = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Fx = 0\} \qquad \text{(t.c.)}$$

$$\bar{x} \in \ker(F - I) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, (F - I)x = 0\} \qquad \text{(t.d.)}$$

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}$ eq $\Longleftrightarrow \bar{x}(1-\bar{x}) = 0$ $\nearrow \bar{x} = 0$, $\searrow \bar{x} = 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}$ eq. $\Longleftrightarrow \bar{x}^2 + 1 = 0 \quad \bar{x}^2 = -1 \quad \bar{x} = \pm i$ $\rightarrow$ $\emptyset$ equilibri

3. $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{F} x \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^2$ eq. $\Longleftrightarrow F\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} -\bar{x}_1 = 0 \\ 2\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{F} x \longrightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^2$ eq $\Longleftrightarrow F\bar{x} = 0$ $\quad \begin{cases} -\bar{x}_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

∞ equilibri

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \implies$ due equilibri: $\bar{x} = 0, 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \implies$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \implies$ unico equilibrio: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \implies$ infiniti equilibri: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)} \qquad \dot{x} = Fx + Gu$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)} \qquad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante, } u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

LINEARI

$$F\bar{x} = -G\bar{u}$$

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{cases} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \rightarrow F\bar{x} + G\bar{u} = 0 & \text{(t.c.)} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \rightarrow \bar{x} = F\bar{x} + G\bar{u} & \text{(t.d.)} \end{cases}$$

$$(F - I)\bar{x} = -G\bar{u}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{(t.c.)}$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+ \qquad \text{(t.d.)}$$

$$\boxed{u(t) \text{ costante},\ u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$$

caso lineare

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{array}{lll} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 & F\bar{x} = -G\bar{u} & \text{(t.c.)} \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) & (F - I)\bar{x} = -G\bar{u} & \text{(t.d.)} \end{array}$$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0$ $\longrightarrow$ $\bar{x} \in \mathbb{R}$ eq. $\Longleftrightarrow$ $\bar{u} = 0$ $\quad \emptyset$ equilibri

2. $\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{G} \bar{u}$ $\longrightarrow$ $F\bar{x} + G\bar{u} = 0 \rightarrow F\bar{x} = -G\bar{u}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -\bar{x}_2 = -\bar{u} \end{cases} \longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

∞ equilibri

note

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \qquad \Longrightarrow \qquad$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases} \qquad \Longrightarrow$

nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$

un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$

due equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

note

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

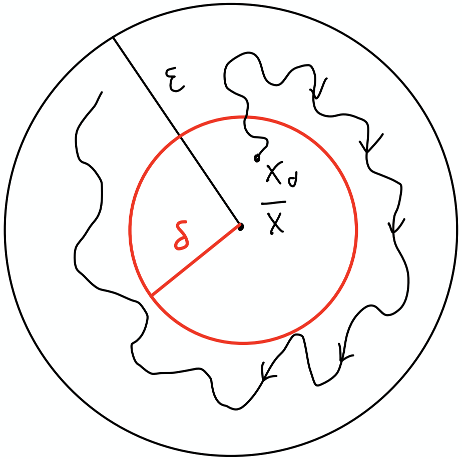
Stabilità semplice

$\dot{x} = f(x) \qquad x(t+1) = f(x(t))$

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto semplicemente stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che

norma Euclidea $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$



Stabilità asintotica

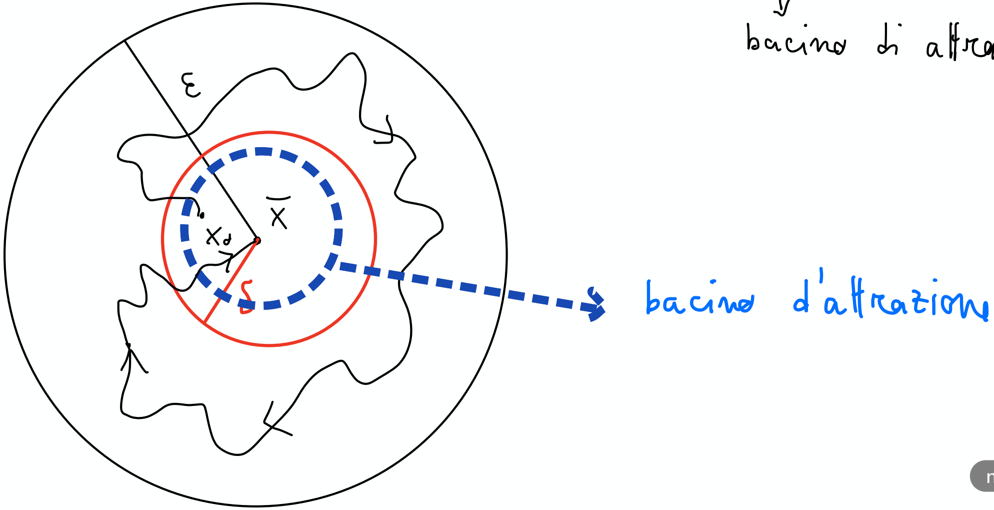
attrattività $\not\Rightarrow$ stabilità semplice

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.

(attrattività)

bacino di attrazione



note

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale.
Se la condizione (ii) della stabilità asintotica vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si parla di stabilità asintotica globale.

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale.
Se la condizione (ii) della stabilità asintotica vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si parla di stabilità asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un opportuno cambio di variabile, si può sempre "spostare" l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

$$\dot{x} = Fx \qquad \bar{x} \neq 0 \longrightarrow \delta_x(t) = x(t) - \bar{x} \rightarrow x(t) = \delta_x(t) + \bar{x}$$

$$\dot{\delta}_x(t) = F(\delta_x(t) + \bar{x}) \stackrel{!}{=} F\delta_x(t) + \underbrace{F\bar{x}}_{=0} = F\delta_x(t)$$

In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

non-lineare

$\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$ $\longrightarrow$ scostamento dall'equilibrio

$$f(x) = \overbrace{f(\bar{x})}^{=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x}) \delta_x + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x}) \delta_x^2 + \dots \quad \approx \overbrace{f(\bar{x})}^{=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x}) \delta_x$$

$\hookrightarrow$ espansione in serie di Taylor attorno a $\bar{x}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\delta_x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})\delta_x^2 + \dots \quad \approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\delta_x$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = \overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})}^{F \in \mathbb{R}}\, \delta_x}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

n- dimensionale

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+$$

sistema n-dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x + \ldots \approx f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x$$

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\ldots,n \;\to\; \text{righe} \\ j=1,\ldots,n \;\to\; \text{colonne}}} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{Jacobiano di } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x + \ldots \approx f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x$$

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{Jacobiano di } f$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = J_f(\bar{x})\,\delta_x}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\qquad \begin{matrix} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{matrix}$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

note

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad$ $\bar{x} = 0$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\dot{\delta}_x = \delta_x$

$\bar{x} = \pi$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\dot{\delta}_x = -\delta_x,\ \delta_x \triangleq x - \pi$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\delta}_x = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\delta}_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \delta_x$

note

Linearizzazione attorno ad un equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x} = f(x, u),\ t \in \mathbb{R}_+$

sistema n-dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio relativo all'ingresso costante $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x} = f(x,u),\ t \in \mathbb{R}_+$

sistema n-dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio relativo all'ingresso costante $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x},\ \delta_u \triangleq u - \bar{u}$$

$$f(x,u) = f(\bar{x},\bar{u}) + J_f^{(x)}(\bar{x},\bar{u})\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x},\bar{u})\delta_u + \dots$$

$$J_f^{(x)}(x,u) = \left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n},\quad J_f^{(u)}(x,u) = \left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n\times \overset{m}{\cancel{n}}}$$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x} = f(x, u), \; t \in \mathbb{R}_+$

sistema n-dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio relativo all'ingresso costante $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}, \; \delta_u \triangleq u - \bar{u}$$

$$f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + J_f^{(x)}(\bar{x}, \bar{u})\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x}, \bar{u})\delta_u + \dots$$

$$J_f^{(x)}(x, u) = \left[\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad J_f^{(u)}(x, u) = \left[\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial u_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n\times \cancel{n}\, m}$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = \underbrace{J_f^{(x)}(\bar{x}, \bar{u})}_{F}\, \delta_x + \underbrace{J_f^{(u)}(\bar{x}, \bar{u})}_{G}\, \delta_u}$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 4: Equilibri, stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u}, \quad \bar{u} \neq 0$

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$

note

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ equilibrio} \iff \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 + \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ \bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1^{(1,2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\bar{u}}}{2}$$

1) $1 - 4\bar{u} < 0 \rightarrow \bar{u} > 1/4 \rightarrow \bar{x}_1^{(1,2)}$ hanno una parte immaginaria $\neq 0$

$\rightarrow \emptyset$ equilibri

2) $1 - 4\bar{u} = 0 \rightarrow \bar{u} = 1/4 \rightarrow \bar{x}_1 = 1/2$

$\rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ 1 eq.

3) $1 - 4\bar{u} > 0 \rightarrow \bar{u} < 1/4 \longrightarrow \bar{x}_1^{(1,2)} \in \mathbb{R}$

$$\bar{x}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix} \quad 2 \text{ eq.}$$

Stabilità asintotica

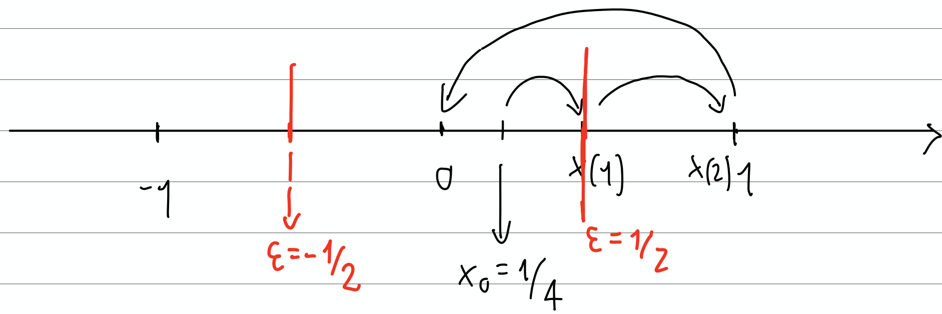
Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ “sufficientemente vicino” a $\bar{x}$.

note

$$x(t+1) = \begin{cases} 2x(t) & |x(t)| < 1 \\ 0 & |x(t)| \geq 1 \end{cases} \qquad x(t) \in \mathbb{R}$$

$\bar{x} = 0$ equilibrio



$\bar{x} = 0$ attrattivo $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\varepsilon = 1/2 \longrightarrow \nexists\, \delta$ t.c. $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$

$\longrightarrow \bar{x}$ non è semplicemente stabile!

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \begin{matrix}\bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi\end{matrix}$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0$

3. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5\end{cases} \quad \begin{bmatrix}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$

note

1) $\dot{x} = \sin x \longrightarrow \bar{x} = 0 \longrightarrow \delta_x = x - \overset{0}{\bar{x}} = x \longrightarrow \dot{\delta}_x = \cos \overset{0}{\bar{x}}\, \delta_x = \delta_x$

$\qquad\qquad\quad \longrightarrow \bar{x} = \pi \longrightarrow \delta_x = x - \pi \longrightarrow \dot{\delta}_x = \cos \underset{\pi}{\bar{x}}\, \delta_x = -\delta_x$

2) $\dot{x} = \alpha x^3, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0 \longrightarrow \delta_x = x - \overset{0}{\bar{x}} \longrightarrow \dot{\delta}_x = \underbrace{3\alpha \bar{x}^2}_{0} \delta_x = 0$

3) $\begin{cases}\dot{x}_1 = \overbrace{-x_2 + x_1 x_2^2}^{f_1(x)} \\ \dot{x}_2 = \underbrace{x_1 + x_2^5}_{f_2(x)}\end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}$

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 & -1 + 2x_1 x_2 \\ 1 & 5x_2^4 \end{bmatrix}$$

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{\delta}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} \delta_x$$