

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

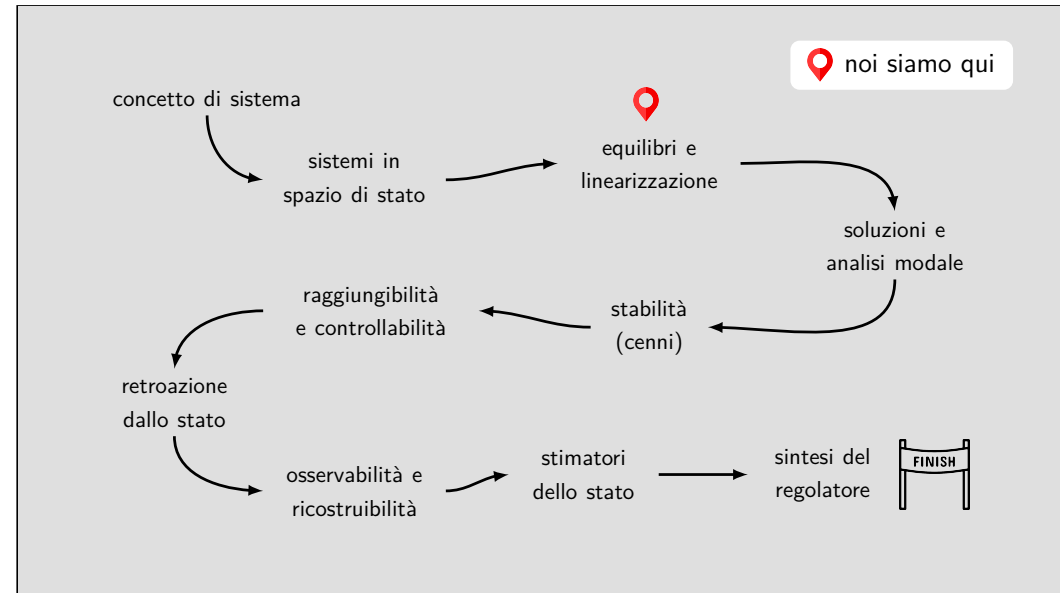
## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 4: Equilibri, stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



## In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

## Traiettorie di stato e ritratto di fase

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = f(x(t)), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

**Traiettoria di stato** del sistema relativa a c.i.  $x(0) = x_0$ :  $\{x(t) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$

**Ritratto di fase** del sistema = insieme delle traiettorie di stato  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

## Traiettorie di stato e ritratto di fase: esempi

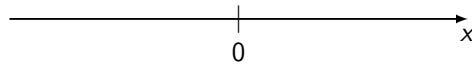
Sistema lineare tempo invariante scalare ( $f \in \mathbb{R}$ ):

$$\dot{x}(t) = fx(t), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = fx(t), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 \quad (\text{t.c.})$$

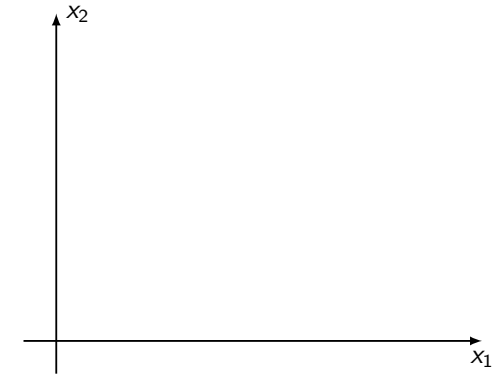
$$x(t) = f^t x_0 \quad (\text{t.d.})$$



## Traiettorie di stato e ritratto di fase: esempi

Dinamica preda-predatore ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \gamma x_1(t)x_2(t) - \delta x_2(t) \end{cases}$$



## Punti di equilibrio

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.}) \quad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff f(\bar{x}) = 0$$

$$x(t+1) = f(x(t)), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.}) \quad \bar{x} \text{ equilibrio} \iff \bar{x} = f(\bar{x})$$

**Definizione:**  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è detto punto di equilibrio del sistema se preso  $x_0 = \bar{x}$ ,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\text{Caso lineare: } \bar{x} \text{ equilibrio} \iff \bar{x} \in \ker F = \{x \in \mathbb{R}^n : Fx = 0\} \quad (\text{t.c.})$$

$$\bar{x} \in \ker(F - I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (F - I)x = 0\} \quad (\text{t.d.})$$

## Punti di equilibrio: esempi

$$1. \dot{x} = x(1-x) \implies \text{due equilibri: } \bar{x} = 0, 1$$

$$2. \dot{x} = x^2 + 1 \implies \text{nessun equilibrio}$$

$$3. \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \implies \text{unico equilibrio: } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4. \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \implies \text{infiniti equilibri: } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

## Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{t.c.})$$

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), t \in \mathbb{Z}_+ \quad (\text{t.d.})$$

$$u(t) \text{ costante, } u(t) = \bar{u}, \forall t \geq 0$$

$$\bar{x} \text{ equilibrio} \iff \begin{cases} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \\ \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{caso lineare} \\ \boxed{F\bar{x} = -G\bar{u}} \\ \boxed{(F-I)\bar{x} = -G\bar{u}} \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{t.c.}) \\ (\text{t.d.}) \end{array}$$

## Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

$$1. \dot{x} = \bar{u}, \bar{u} \neq 0 \implies \text{nessun equilibrio}$$

$$2. \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u} \implies \text{infiniti equilibri } \bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3. \begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases} \implies \begin{array}{l} \text{nessun equilibrio se } \bar{u} > \frac{1}{4} \\ \text{un equilibrio } \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ se } \bar{u} = \frac{1}{4} \\ \text{due equilibri } \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix} \text{ se } \bar{u} < \frac{1}{4} \end{array}$$

## Stabilità semplice

**Definizione:** Un punto di equilibrio  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è detto **semplicemente stabile** se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

## Stabilità asintotica

**Definizione:** Un punto di equilibrio  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è detto **asintoticamente stabile** se:

- 1  $\bar{x}$  è semplicemente stabile e
- 2  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$  per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  "sufficientemente vicino" a  $\bar{x}$ .

## Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere **locale**.  
Se la condizione (ii) della stabilità asintotica vale per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  allora si parla di stabilità asintotica **globale**.
2. Per sistemi lineari si può parlare di **stabilità del sistema** invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un opportuno cambio di variabile, si può sempre "spostare" l'equilibrio in  $\bar{x} = 0$ .

## Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x), t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{sistema scalare, } \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ punto di equilibrio}$$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{d}{dx}f(\bar{x})\delta_x + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}f(\bar{x})\delta_x^2 + \dots \approx f(\bar{x}) + \frac{d}{dx}f(\bar{x})\delta_x$$

Sistema linearizzato attorno a  $\bar{x}$ :

$$\dot{\delta}_x = \frac{d}{dx}f(\bar{x})\delta_x$$

## Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{sistema } n\text{-dim.}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x + \dots \approx f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x$$

$$J_f(x) = \left[ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{Jacobiano di } f$$

Sistema linearizzato attorno a  $\bar{x}$ :

$$\dot{\delta}_x = J_f(\bar{x})\delta_x$$

## Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

$$1. \quad \dot{x} = \sin x \quad \begin{matrix} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \dot{\delta}_x = \delta_x \\ \dot{\delta}_x = -\delta_x, \delta_x \triangleq x - \pi \end{matrix}$$

$$2. \quad \dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \bar{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\delta}_x = 0$$

$$3. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\delta}_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \delta_x$$

## Linearizzazione attorno ad un equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x} = f(x, u), t \in \mathbb{R}_+$  sistema  $n$ -dim.,  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  punto di equilibrio  
relativo all'ingresso costante  $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}, \delta_u \triangleq u - \bar{u}$$

$$f(x, u) = f(\bar{x}, \bar{u}) + J_f^{(x)}(\bar{x}, \bar{u})\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x}, \bar{u})\delta_u + \dots$$

$$J_f^{(x)}(x, u) = \left[ \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j} \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad J_f^{(u)}(x, u) = \left[ \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial u_j} \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Sistema linearizzato attorno a  $\bar{x}$ :  $\dot{\delta}_x = J_f^{(x)}(\bar{x}, \bar{u})\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x}, \bar{u})\delta_u$