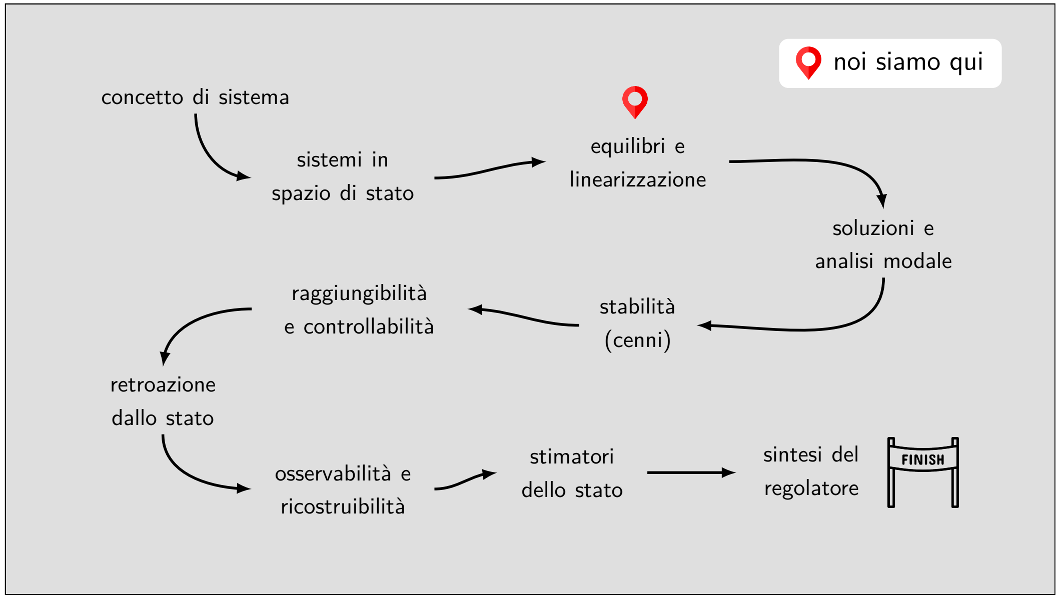
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 4: Equilibri, stabilità, linearizzazione

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Traiettorie di stato di un sistema
- ▷ Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- ▷ Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- ▷ Linearizzazione di sistemi non lineari (con e senza ingressi)

Traiettorie di stato e ritratto di fase

$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

Traiettoria di stato del sistema relativa a c.i. $x(0) = x_0$: $\{x(t) \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$

Ritratto di fase del sistema = insieme delle traiettorie di stato $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Traiettorie di stato e ritratto di fase: esempi

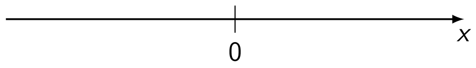
Sistema lineare tempo invariante scalare ($f \in \mathbb{R}$):

$\dot{x}(t) = fx(t),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = fx(t),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$x(t) = e^{ft}x_0$ (t.c.)

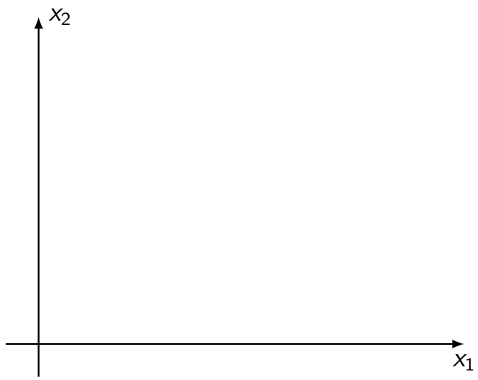
$x(t) = f^t x_0$ (t.d.)



Traiettorie di stato e ritratto di fase: esempi

Dinamica preda-predatore ($\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - \beta x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \gamma x_1(t)x_2(t) - \delta x_2(t) \end{cases}$$



Punti di equilibrio

$\dot{x}(t) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.) $\quad \bar{x}$ equilibrio $\iff f(\bar{x}) = 0$

$x(t+1) = f(x(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.) $\quad \bar{x}$ equilibrio $\iff \bar{x} = f(\bar{x})$

Definizione: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto punto di equilibrio del sistema se preso $x_0 = \bar{x}$,

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \geq 0.$$

Caso lineare: $\bar{x}$ equilibrio $\iff$

$\bar{x} \in \ker F = \{x \in \mathbb{R}^n : Fx = 0\}$ (t.c.)

$\bar{x} \in \ker(F - I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (F - I)x = 0\}$ (t.d.)

Punti di equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = x(1-x) \implies$ due equilibri: $\bar{x} = 0, 1$

2. $\dot{x} = x^2 + 1 \implies$ nessun equilibrio

3. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \implies$ unico equilibrio: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \implies$ infiniti equilibri: $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$

Punti di equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{R}_+$ (t.c.)

$x(t+1) = f(x(t), u(t)),\ t \in \mathbb{Z}_+$ (t.d.)

$\boxed{u(t) \text{ costante, } u(t) = \bar{u},\ \forall t \geq 0}$

caso lineare

$\bar{x}$ equilibrio $\iff$

$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ $\quad F\bar{x} = -G\bar{u}$ (t.c.)

$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$ $\quad (F - I)\bar{x} = -G\bar{u}$ (t.d.)

Punti di equilibrio in presenza di ingressi: esempi

1. $\dot{x} = \bar{u},\ \ \bar{u} \neq 0$ $\implies$ nessun equilibrio

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \bar{u}$ $\implies$ infiniti equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{u} \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

3. $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + \bar{u} \end{cases}$ $\implies$

nessun equilibrio se $\bar{u} > \frac{1}{4}$

un equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} = \frac{1}{4}$

due equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$ se $\bar{u} < \frac{1}{4}$

Stabilità semplice

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto semplicemente stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Stabilità asintotica

Definizione: Un punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto asintoticamente stabile se:

1. $\bar{x}$ è semplicemente stabile e
2. $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ "sufficientemente vicino" a $\bar{x}$.

Stabilità semplice e asintotica: osservazioni

1. Le definizioni di stabilità semplice/asintotica hanno carattere locale.
   Se la condizione (ii) della stabilità asintotica vale per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora si parla di stabilità asintotica globale.

2. Per sistemi lineari si può parlare di stabilità del sistema invece che del punto di equilibrio. Infatti, con un opportuno cambio di variabile, si può sempre "spostare" l'equilibrio in $\bar{x} = 0$.

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$\dot{x} = f(x),\ t \in \mathbb{R}_+$ sistema scalare, $\bar{x} \in \mathbb{R}$ punto di equilibrio

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\delta_x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\bar{x})\delta_x^2 + \dots \quad \approx f(\bar{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\delta_x$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\bar{x})\, \delta_x}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio

$$\dot{x} = f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}_+ \qquad \text{sistema } n\text{-dim., } \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ punto di equilibrio}$$

$$\delta_x \triangleq x - \bar{x}$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x + \dots \approx f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})\delta_x$$

$$J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n} = \text{Jacobiano di } f$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = J_f(\bar{x})\,\delta_x}$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad \begin{matrix} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \dot{\delta}_x = \delta_x \\ \dot{\delta}_x = -\delta_x, \ \delta_x \triangleq x - \pi \end{matrix}$

2. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\delta}_x = 0$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\delta}_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \delta_x$

Linearizzazione attorno ad un equilibrio in presenza di ingressi

$\dot{x} = f(x,u),\ t \in \mathbb{R}_+$ — sistema n-dim., $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ punto di equilibrio relativo all'ingresso costante $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

$\delta_x \triangleq x - \bar{x},\ \delta_u \triangleq u - \bar{u}$

$$f(x,u) = f(\bar{x},\bar{u}) + J_f^{(x)}(\bar{x},\bar{u})\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x},\bar{u})\delta_u + \dots$$

$$J_f^{(x)}(x,u) = \left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n},\quad J_f^{(u)}(x,u) = \left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$: $\boxed{\dot{\delta}_x = J_f^{(x)}(\bar{x},\bar{u})\,\delta_x + J_f^{(u)}(\bar{x},\bar{u})\,\delta_u}$