Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

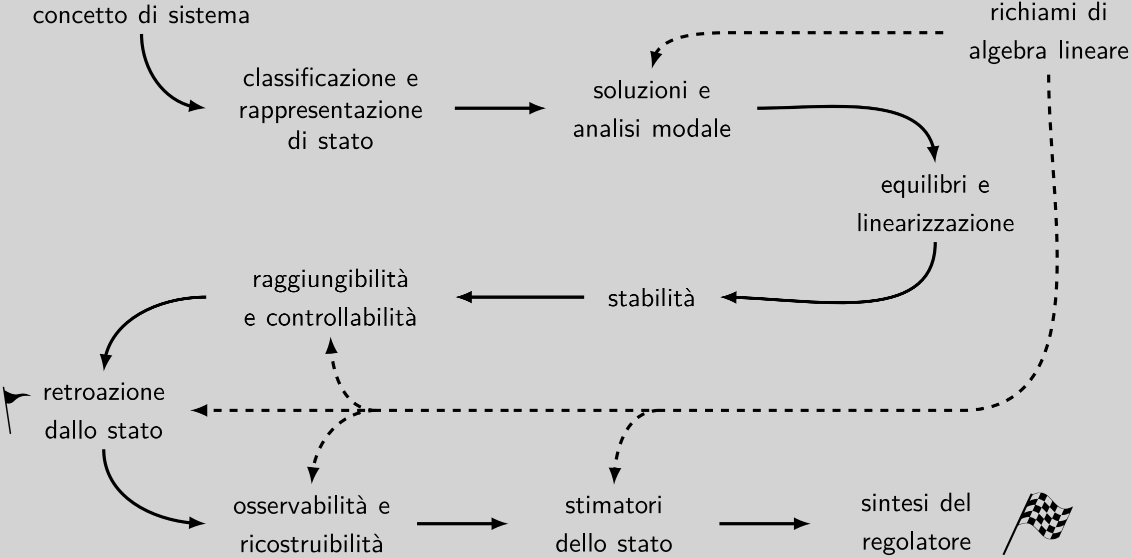
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

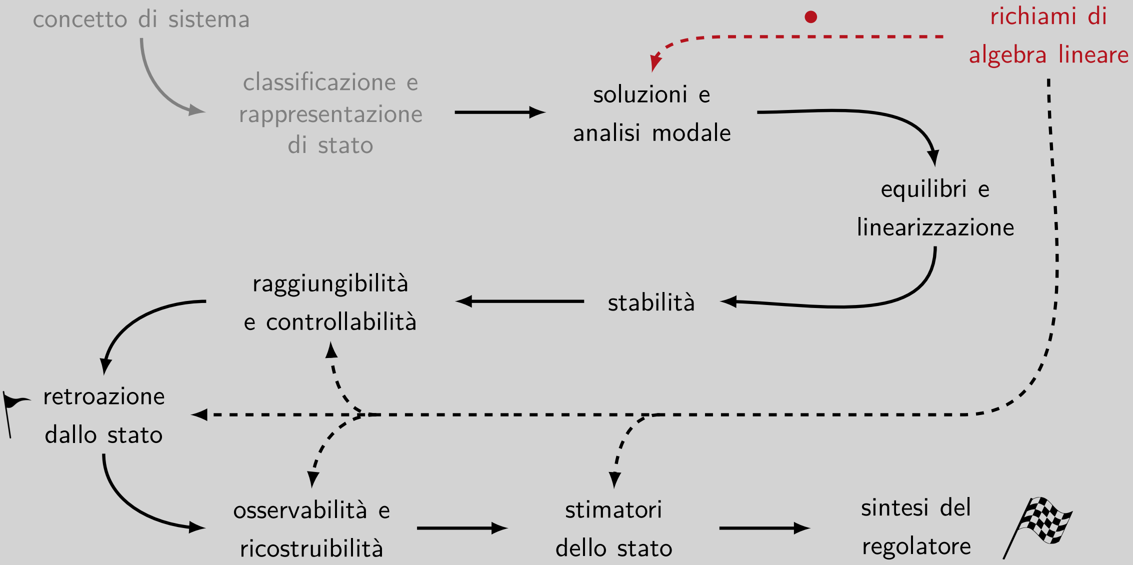
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Richiami di Algebra Lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore



● noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- Classificazione di sistemi
- Rappresentazione di sistemi
- Sistemi lineari in spazio di stato
- Esempi di sistemi a tempo continuo
- Esempi di sistemi a tempo discreto

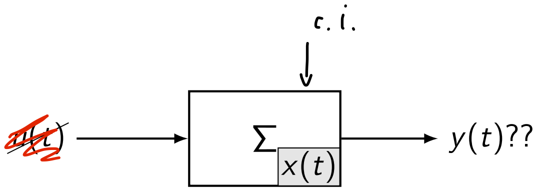
In questa lezione

- Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- Concetti base di algebra lineare
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- Forma canonica di Jordan: idea generale

In questa lezione

- Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- Concetti base di algebra lineare
- Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- Forma canonica di Jordan: idea generale

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?

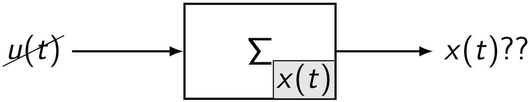


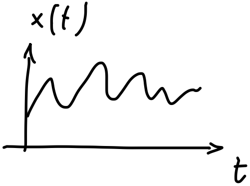
Σ lineare, tempo invariante e autonomo $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ y(t) \in \mathbb{R}^p,\ u(t) \equiv 0$

Tempo continuo:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

Come sono fatte le soluzioni di Σ
$x(t)$? $y(t)$?

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



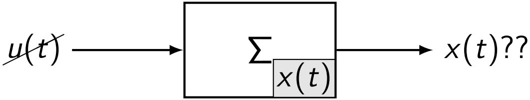


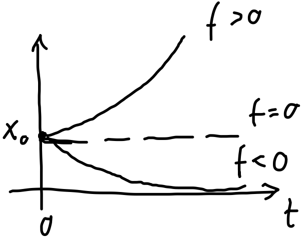
Caso scalare $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = \overset{\in \mathbb{R}}{f}\, x(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = ??$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?





Caso scalare $\qquad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

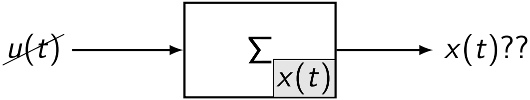
$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{ft}x_0\right) = f e^{ft} x_0 = f\,x(t)$$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{f^nt^n}{n!} + \dots\right)x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k t^k}{k!}$$

serie di Taylor

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



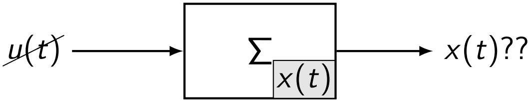
Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = ??$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



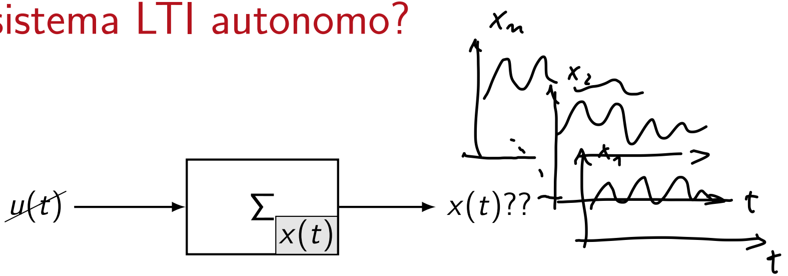
Caso vettoriale $\qquad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 = ??$$

esponenziale di matrice

Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

· serie ben def.
· converge sempre

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

matrice

$$x(t) = \boxed{e^{Ft}}x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{F^n t^n}{n!} + \dots \right) x_0 = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

extra

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

caso più in generale: F diagonale $\approx$ n casi "scalari"

$$F = \begin{array}{c} \in \mathbb{R} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \in \mathbb{R} \end{array} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

extra

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I$, $N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$,...

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

extra

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I,\ N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \ldots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

$N^k = 0 \quad k \geq \bar{k}$

caso più in generale: F "quasi"-diagonale

$\exists \bar{k} : N^{\bar{k}} = 0$

nilpotenti

$f \in \mathbb{R}$

$F = I + N$

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

extra

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I,\ F^1 = F,\ F^2 = -I,\ F^3 = -F,\ F^4 = I, \ldots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

→ diagonale
→ "quasi" diagonale

utile in casi "semplici"...

....ma come fare in casi più complessi (F "piena" e senza "struttura")?

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi "semplici"...

....ma come fare in casi più complessi (F "piena" e senza "struttura")?

cambio di base

forma di Jordan

Strategia: Trasformare F in una forma "semplice" (diagonale o quasi-diagonale)!

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Vettori e basi in $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$

1. L'insieme (di vettori) $\mathbb{R}^n$ con campo (di scalari) $\mathbb{R}$ dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sono detti linearmente indipendenti (dipendenti) se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_n, \ \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\not\Rightarrow) \ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se:

(i) generano $\mathbb{R}^n$: $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$

(ii) sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow k = n$

Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice lineare se

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, \, v_2 \in \mathbb{R}^m$ (additività)

(i) $f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (omogeneità)

2. Una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è completamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^m$.

3. Viceversa, data una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^m$, una trasformazione $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ si può estendere linearmente in modo unico all'intero spazio $\mathbb{R}^m$.

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

extra

1. Fissata una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^m$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$ è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tale che

$$\cancel{f(v) = Fv, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.}$$

è invertibile

2. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ad una "nuova" base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$\boxed{F' = T^{-1}FT.}$$

Matrici: fatti base

$\underset{n\times m}{F} v$, $v \in \mathbb{R}^m$ $w \in \mathbb{R}^n$ n m

1. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m : Fv = 0\},$$ nucleo, spazio nullo

$$\operatorname{im} F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n : w = \cancel{A}\,\overset{}{\underset{F}{}}v, \exists v \in \mathbb{R}^m\}.$$ immagine

2. Sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $Fv = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$, è detto autovettore di F corrispondente all'autovalore λ.

3. Gli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sono le radici del polinomio caratteristico

det$(\lambda I - F)$

$$p(\lambda) = \det(F - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}, \; = \Delta_F(\lambda)$$

dove ν_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i.

Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore v relativo all'autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soddisfa

$$(F - \lambda_i I)v = 0_n.$$

$v \in \ker(F - \lambda_i I) =$ autospazio relativo a λ_i

5. La molteplicità ~~algebrica~~ geometrica g_i di autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è il numero massimo di autovettori linearmente independenti associati a λ_i e coincide con

$$g_i = \dim \ker(F - \lambda_i I).$$

$\nu_i \geq g_i$

Teorema di diagonalizzazione

6. Se $\nu_i = g_i$ per ogni autovalore λ_i di $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ allora F è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$T = [v_1, \dots, v_n]$

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

$F_D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Esempio: diagonalizzazione

extra

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$ F diagonalizzabile? Se sì, calcolare T.

$$\lambda_1 = i,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = -i,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile } \checkmark$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizzabile $\quad (\nu_i = g_i$ per ogni autovalore $\lambda_i)$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile $\quad (\nu_i = g_i$ per ogni autovalore $\lambda_i)$

$$\Big\downarrow$$

Esiste $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $F_D = T^{-1}FT$ diagonale

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizzabile $\quad (\nu_i = g_i$ per ogni autovalore $\lambda_i)$

$$\Big\downarrow$$

Esiste $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $F_D = T^{-1}FT$ diagonale

$\boxed{\text{Come ci aiuta questo nel calcolo di } e^{Ft}\text{?}}$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

extra

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizzabile $\quad (\nu_i = g_i$ per ogni autovalore $\lambda_i)$

$$F = TF_D T^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_D T^{-1} t}$$

$$(TF_D T^{-1} t)^n = T(F_D t)^n T^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_D t} T^{-1}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

extra

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$ calcolare e^{Ft} tramite diagonalizzazione di F.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix},\ F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = Te^{F_D t}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

Obiettivo

Calcolare le soluzioni $\dot{x} = Fx$, $x(0) = x_0$

$\downarrow$

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\downarrow$

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Obiettivo

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\downarrow$$

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

$\to \nu_i > g_i$

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T?

Obiettivo

Calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\Big\downarrow$$

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $T^{-1}FT$ diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale T?

Trovare una matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $T^{-1}FT$ "quasi" diagonale!

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \underline{\lambda_1 = 1}, \ \underline{\nu_1 = 2}, \ g_1 = 2 \implies \underline{\nu_1 = g_1 \text{ diagonalizzabile}}$ ✓

$$F - \lambda_i I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

   $\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

   $\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$ molteplicità algebrica λ_i

$g_i =$ molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$\downarrow$

possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & F_\ell \end{bmatrix}$$

$F_i \to$ diag

$\quad \to$ quasi-diag

Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$

ν_i = molteplicità algebrica λ_i

g_i = molteplicità geometrica λ_i

Caso 1: $\nu_i = g_i$ per ogni $i \implies F$ diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste i tale che $\nu_i > g_i \implies F$ non diagonalizzabile ✗

$\downarrow$

possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

...e i blocchi "quasi" diagonali hanno la forma di slide 15!

$$\begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix}$$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Richiami di Algebra Lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

extra

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

back

$$e^{Ft} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n t^n}{n!}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = I + Ft + F^2 \frac{t^2}{2} + F^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 2t + 4\frac{t^2}{2} + 8\frac{t^3}{3!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

extra

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I,\ N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \dots$ $\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

back

$$e^{Ft} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^n t^n}{n!}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 metodi

1) $$e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \frac{t^2}{2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix} \frac{t^n}{n!} & n\frac{t^n}{n!} \\ 0 & \frac{t^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & \boxed{te^t} \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

comportamento non presente nel caso scalare

$$\sum_{n\geq 0} n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} = t\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = te^t$$

back

2) metodo "furbo"

matrici A e B commutano

Proprietà: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se $\boxed{AB = BA} \Longrightarrow e^{A+B} = e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A}$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{N}$$

N e I commutano? ✓

$$IN = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad NI = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = e^{(I+N)t} = e^{It}\, e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} & te^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \frac{t^{2}}{2} + \dots \qquad (N^{k} = 0,\ k \geq 2)$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

extra

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I,\ N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \ldots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$\Longrightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

back

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I, N commutano

$$e^{Ft} = e^{(I+N)t} = e^{It} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2 e^t}{2} \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + 0 + \ldots \qquad N^k = 0 \ k \geq 3$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

extra

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{n\geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I,\ F^1 = F,\ F^2 = -I,\ F^3 = -F,\ F^4 = I, \dots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

back

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!}$$

$$e^{Ft} = I + Ft + \frac{F^2 t^2}{2} + \frac{F^3}{3!} t^3 + \frac{F^4}{4!} t^4 + \frac{F^5 t^5}{5!} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \frac{t^2}{2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \frac{t^3}{3!} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \frac{t^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \cdots$$

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} - \cdots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

extra

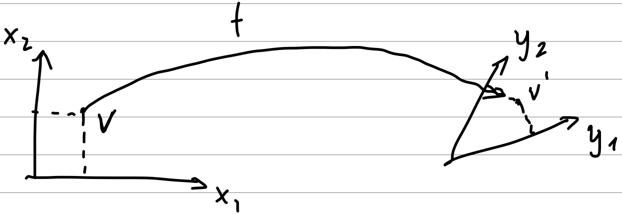
1. Fissata una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^m$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^n$ è possibile rappresentare una trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ con una matrice $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tale che

$$f(v) = Fv, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

2. Fissata una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$, sia $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice che rappresenta la trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sia $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ ad una "nuova" base $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^n$. La matrice che rappresenta f nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT.$$

back



$$F : \underset{\mathcal{B}_1}{\text{coord. } v} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{B}_2}{\text{coord } v'}$$

$$F \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Esempio: diagonalizzazione

extra

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, F diagonalizzabile? Se sì, calcolare T.

$\lambda_1 = i,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = -i,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1 \implies F$ diagonalizzabile ✓

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

back

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$ F diagonalizzabile? Se sì, T?

1) Autovalori:

$$\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \qquad \nu_{1,2} = +1$$

2) Autovettori:

Autovettori relativi a $\lambda_1 = i$: $(F - \lambda_1 I) v_1 = 0$

back

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -i\, v_{1,1} + v_{1,2} = 0 \\ -v_{1,1} - i\, v_{1,2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{1,2} = i\, v_{1,1} \\ \text{"} \end{cases} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$g_1 = 1$$

$$-v_{1,1} = i\, v_{1,2} \quad +i\, v_{1,1} = +v_{1,2}$$

Autovettori relativi a $\lambda_2 = -i$:

$$(F - \lambda_2 I)\, v_2 = 0 \qquad \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} i\, v_{2,1} + v_{2,2} = 0 \\ -v_{2,1} + i\, v_{2,2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{2,2} = -i\, v_{2,1} \\ \text{"} \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$g_2 = 1$$

back

$\nu_1 = g_1 = 1, \quad \nu_2 = g_2 = 1 \implies F$ diagonalizzabile

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} i \end{bmatrix}$$

$$F_D = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

FORMULA INVERSA 2x2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione

extra

$$F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ diagonalizzabile} \quad (\nu_i = g_i \text{ per ogni autovalore } \lambda_i)$$

$$F = TF_DT^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_DT^{-1}t}$$

$$(TF_DT^{-1}t)^n = T(F_Dt)^nT^{-1} \implies e^{Ft} = Te^{F_Dt}T^{-1}$$

back

F diagonalizzabile

$$\exists\, T : F_D = T^{-1}FT \implies \underline{F = TF_DT^{-1}}$$

$$F^2 = (TF_DT^{-1})^2 = TF_D\cancel{T^{-1}}\cancel{T}F_DT^{-1} = TF_D^2T^{-1}$$

$\vdots$

$$F^k = TF_D^kT^{-1}$$

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} F^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (TF_DT^{-1})^k \frac{t^k}{k!} = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} F_D^k \frac{t^k}{k!}\right)T^{-1} = Te^{F_Dt}T^{-1}$$

Calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione: esempio

extra

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcolare e^{Ft} tramite diagonalizzazione di F.

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$, $F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$e^{Ft} = Te^{F_D t}T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$

back

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

calcolo di e^{Ft} tramite diagonalizzazione?

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

$$F_D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right) & \frac{1}{2}i\left(-e^{it}+e^{-it}\right) \\ \frac{1}{2}i\left(e^{it}-e^{-it}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right) \end{bmatrix}$$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right) & \frac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right) \\ \frac{1}{2i}\left(-e^{it}+e^{it}\right) & \frac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

$\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

back

lin. dip.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det F = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$\det F = 0$ $\to$ $\lambda_1 = 0$

$\to$ $\lambda_2 \neq 0$ (altrimenti la matrice sarebbe nulla)

$g_i \geq 1$ $\qquad g_1 + g_2 \leq \dim F = 2$

$g_1 = g_2 = 1 = \nu_1 = \nu_2 \implies$ diagonalizzabile

essendo F simmetrica

(non vale in generale, cf. matrici nilpotenti)

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

back

$$\det(F) = \Delta_F(0) = (-1)^n (-\lambda_1)^{\nu_1} \cdots (-\lambda_k)^{\nu_k}$$

$$\overset{!}{=} \cancel{(-1)^n}\,\cancel{(-1)^n}\,\lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_k^{\nu_k}$$

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$ diagonalizzabile ✓

2. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \nu_1 = 1,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \nu_2 = 1,\ g_2 = 1$

   $\implies \nu_i = g_i$ diagonalizzabile ✓

3. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1,\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$ non diagonalizzabile! ✗

back

$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ diagonalizzabile?

1) Autovalori di F: $\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2$

$\hookrightarrow \lambda_1 = 1$

$\nu_1 = 2$

2) Autovettori di F relativi a $\lambda_1 = 1$:

$v_1 : \quad (F - \lambda_1 I) v_1 = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} v_{1,2} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$g_1 = 1$

$\nu_1 > g_1 \implies F$ non è diagonalizzabile!