

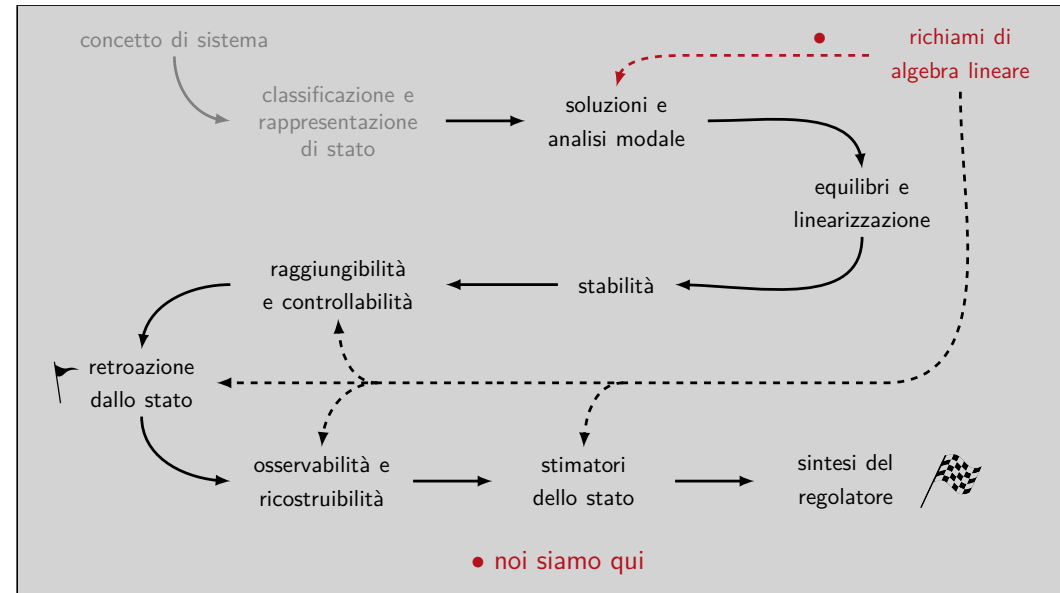
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3 & 4: Esponenziale di Matrice e Richiami di Algebra Lineare

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



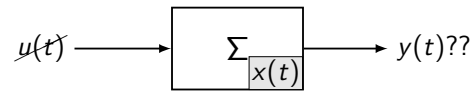
## Nella scorsa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

## In questa lezione

- ▷ Motivazione: soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto
- ▷ Concetti base di algebra lineare
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: diagonalizzazione
- ▷ Forma canonica di Jordan: idea generale

## Soluzioni di un sistema LTI autonomo?

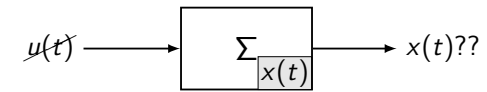


$\Sigma$  lineare, tempo invariante e autonomo  $x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^p, u(t) \equiv 0$

Tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

## Soluzioni di un sistema LTI autonomo?

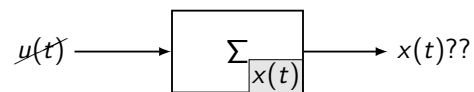


Caso scalare  $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2t^2}{2!} + \dots + \frac{f^nt^n}{n!} + \dots\right)x_0$$

## Soluzioni di un sistema LTI autonomo?



Caso vettoriale  $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2!} + \dots + \frac{F^nt^n}{n!} + \dots\right)x_0$$

## Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

**Esempio 1:**  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

## Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

caso più in generale:  $F$  diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

## Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

**Esempio 2:**  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$ ,  $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i)  $N^0 = I$ ,  $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$   
 (ii)  $e^{I+N} = e^I e^N \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$

## Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

**Esempio 3:**  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$ ,  $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i)  $N^0 = I$ ,  $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$   
 (ii)  $e^{I+N} = e^I e^N \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!} e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

## Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

caso più in generale:  $F$  "quasi"-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \dots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \dots & 0 & f \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \dots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

## Come calcolare $e^{Ft}$ , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

Usiamo la definizione:  $e^{Ft} \triangleq \sum_{n \geq 0} \frac{F^n t^n}{n!}$

**Esempio 4:**  $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I, F^1 = F, F^2 = -I, F^3 = -F, F^4 = I, \dots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

## Calcolo diretto di $e^{Ft}$

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi "semplici"...

....ma come fare in casi più complessi ( $F$  "piena" e senza "struttura")?

**Strategia:** Trasformare  $F$  in una forma "semplice" (diagonale o quasi-diagonale)!

## Vettori e basi in $\mathbb{R}^n$

1. L'insieme (di vettori)  $\mathbb{R}^n$  con campo (di scalari)  $\mathbb{R}$  dotato delle consuete operazioni di somma tra vettori e prodotto di vettore per scalare, è uno spazio vettoriale.

2. I vettori  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  sono detti linearmente indipendenti (**dipendenti**) se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0, \alpha_i \in \mathbb{R} \implies (\nRightarrow) \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

3. I vettori  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  formano una base di  $\mathbb{R}^n$  se:

- (i) generano  $\mathbb{R}^n$ :  $\forall v \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha_i \in \mathbb{R}$  t.c.  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$
- (ii) sono linearmente indipendenti

## Trasformazioni lineari

1. Una trasformazione  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice lineare se

- (i)  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$
- (ii)  $f(\alpha v) = \alpha f(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

2. Una trasformazione lineare  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  è completamente individuata dalla sua restrizione ai vettori di una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^m$ .

3. Viceversa, data una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^m$ , una trasformazione  $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  si può estendere linearmente in modo unico all'intero spazio  $\mathbb{R}^m$ .

## Trasformazioni lineari e rappresentazione matriciale

1. Fissata una base  $\mathcal{B}_1$  di  $\mathbb{R}^m$  e una base  $\mathcal{B}_2$  di  $\mathbb{R}^n$  è possibile rappresentare una trasformazione lineare  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  con una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$  che descrive come le coordinate (rispetto a  $\mathcal{B}_1$ ) di vettori di  $\mathbb{R}^m$  vengono mappate da  $f$  in coordinate di vettori (rispetto a  $\mathcal{B}_2$ ) di  $\mathbb{R}^n$ .

2. Fissata una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^n$ , sia  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice che rappresenta la trasformazione lineare  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sia  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice di cambio di base da  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^n$  ad una "nuova" base  $\mathcal{B}'$  di  $\mathbb{R}^n$ . La matrice che rappresenta  $f$  nella nuova base è

$$F' = T^{-1}FT.$$

## Matrici: fatti base

1. Sia  $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\ker F \triangleq \{v \in \mathbb{R}^m : Fv = 0\},$$

$$\text{im } F \triangleq \{w \in \mathbb{R}^n : w = Fv, \exists v \in \mathbb{R}^m\}.$$

2. Sia  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , un vettore  $v \in \mathbb{C}^n$  tale che  $Fv = \lambda v$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , è detto autovettore di  $F$  corrispondente all'autovalore  $\lambda$ .

3. Gli autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$  di  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sono le radici del polinomio caratteristico

$$\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

dove  $\nu_i$  è la molteplicità algebrica dell'autovalore  $\lambda_i$ .

## Matrici: fatti base

4. Ogni autovettore  $v$  relativo all'autovalore  $\lambda_i$  di  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  soddisfa

$$(F - \lambda_i I)v = 0.$$

5. La molteplicità geometrica  $g_i$  di autovalore  $\lambda_i$  di  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è il numero massimo di autovettori linearmente indipendenti associati a  $\lambda_i$  e coincide con

$$g_i = \dim \ker(F - \lambda_i I).$$

6. Se  $\nu_i = g_i$  per ogni autovalore  $\lambda_i$  di  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  allora  $F$  è diagonalizzabile, i.e., esiste una matrice di cambio di base  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tale che

$$F_D \triangleq T^{-1}FT \text{ è diagonale.}$$

## Esempio: diagonalizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F \text{ diagonalizzabile?} \quad \text{Se sì, calcolare } T.$$

---

$$\lambda_1 = i, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = -i, \nu_2 = 1, g_2 = 1 \implies F \text{ diagonalizzabile} \quad \checkmark$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \implies F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

## Calcolo di $e^{Ft}$ tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalizzabile ( $\nu_i = g_i$  per ogni autovalore  $\lambda_i$ )



Esiste  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tale che  $F_D = T^{-1}FT$  diagonale

Come ci aiuta questo nel calcolo di  $e^{Ft}$ ?

## Calcolo di $e^{Ft}$ tramite diagonalizzazione

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalizzabile ( $\nu_i = g_i$  per ogni autovalore  $\lambda_i$ )

$$F = TF_D T^{-1} \implies e^{Ft} = e^{TF_D T^{-1}t}$$

$$(TF_D T^{-1}t)^n = T(F_D t)^n T^{-1} \implies e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1}$$

## Calcolo di $e^{Ft}$ tramite diagonalizzazione: esempio

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , calcolare  $e^{Ft}$  tramite diagonalizzazione di  $F$ .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, F_D = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = T e^{F_D t} T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

## Obiettivo

Calcolare  $e^{Ft}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$



Trovare una matrice  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tale che  $T^{-1}FT$  diagonale

Non sempre possibile!!! Che fare quando non esiste una tale  $T$ ?

Trovare una matrice  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tale che  $T^{-1}FT$  "quasi" diagonale!

## Esempi

1.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 2 \implies \nu_1 = g_1$  diagonalizzabile ✓

2.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 2, \nu_1 = 1, g_1 = 1, \lambda_2 = 0, \nu_2 = 1, g_2 = 1$   
 $\implies \nu_i = g_i$  diagonalizzabile ✓

3.  $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = 1, \nu_1 = 2, g_1 = 1 \implies \nu_1 > g_1$  non diagonalizzabile! ✗

## Forma di Jordan: idea generale

$F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con autovalori  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$

$\nu_i =$  molteplicità algebrica  $\lambda_i$

$g_i =$  molteplicità geometrica  $\lambda_i$

Caso 1:  $\nu_i = g_i$  per ogni  $i \implies F$  diagonalizzabile ✓

Caso 2: Esiste  $i$  tale che  $\nu_i > g_i \implies F$  non diagonalizzabile ✗

↓  
possiamo trasformare la matrice in una forma a blocchi diagonali o "quasi" diagonali (forma di Jordan)

*...e i blocchi "quasi" diagonali hanno la forma di slide 12!*

$$\begin{bmatrix} f & 1 & \dots & 0 \\ 0 & f & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \dots & 0 & f \end{bmatrix}$$