Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Esempi di modelli di stato

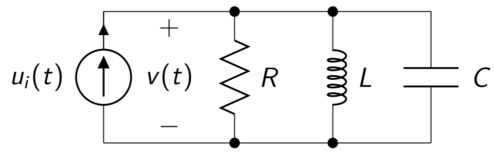
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

In questa lezione

- ▷ Esempi di modelli di stato lineari
- ▷ Funzione di trasferimento $\rightarrow$ spazio di stato
- ▷ Esempi di modelli di stato non lineari

Circuito RLC



$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

F.d.T. $G(s) = \dfrac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$

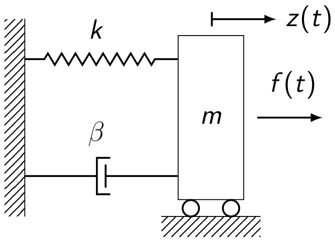
Rappresentazione interna (di stato)

$x_1 = v$, $x_2 = i_L$, $u = u_i$, $y = x_1 = v$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \; J = 0$$

Massa-molla-smorzatore



$f(t)$ = input, $z(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

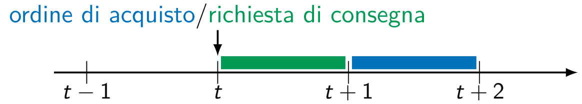
Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1 = z,\ x_2 = \dot{x},\ u = f,\ y = x_1 = z$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0$$

Magazzino merci



$u_1(t)$, $u_2(t)$ = input, $y(t)$ = output

$y(t)$ = quantità merce in magazzino al mese t
$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al mese t
$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al mese t

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G_1(z) = \frac{z^{-1}}{z-1},\quad G_2(z) = -\frac{1}{z-1}$$

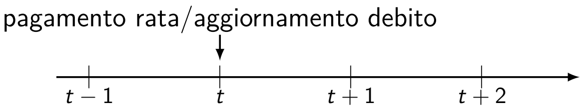
Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = u_1(t-1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estinzione debito



$y(t)$ = debito al mese t = output
$u(t)$ = rata al mese t = input
I = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - (1+I)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(z) = -\frac{z}{z-(1+I)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = x(t) = y(t) + u(t)$$

$$F = 1 + I,\ G = -1 - I$$

$$H = 1,\ J = -1$$

Funzione di trasferimento → spazio di stato

Caso SISO tempo continuo, $W(s)$ solo poli

$$Y(s) = W(s)U(s), \quad W(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\downarrow$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\quad J = 0$$

N.B. Non unica!

Funzione di trasferimento → spazio di stato

Caso SISO tempo continuo, $W(s)$ strettamente propria

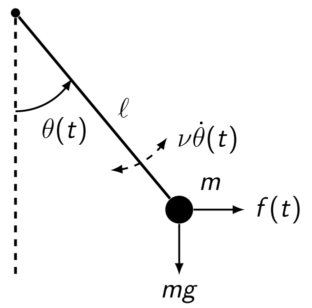
$$Y(s) = W(s)U(s), \quad W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\downarrow$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad J = 0$$

$\boxed{\textbf{N.B. } \text{Non unica!}}$

Pendolo semplice con attrito



$f(t) = \text{input}, \ \theta(t) = \text{output}$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

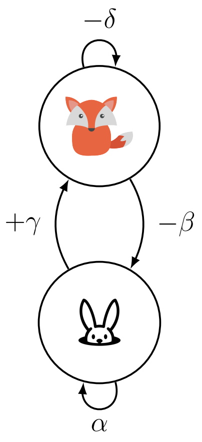
Rappresentazione esterna:

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + mg\ell\sin\theta - f\ell\cos\theta = 0$$

Rappresentazione interna: $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\nu}{m\ell^2}x_2 + \frac{1}{m}\cos x_1 f \\ y = x_1(t) \end{cases}$$

Dinamica di popolazioni preda-predatore



$$\left.\begin{aligned} n_1(t) &= \text{numero di prede al tempo } t \\ n_2(t) &= \text{numero di predatori al tempo } t \end{aligned}\right\} \text{output}$$

α = tasso crescita prede, se isolate
β = tasso decrescita prede causato da predatori
γ = tasso crescita predatori per la presenza di prede
δ = tasso decrescita predatori, se isolati

Rappresentazione interna?

$$x_1 = n_1, \ x_2 = n_2, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = \gamma x_1 x_2 - \delta x_2 \\ y = x \end{cases}$$