

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in
spazio di stato

soluzioni e
analisi modale

equilibri e
linearizzazione

raggiungibilità
e controllabilità

stabilità

retroazione
dallo stato

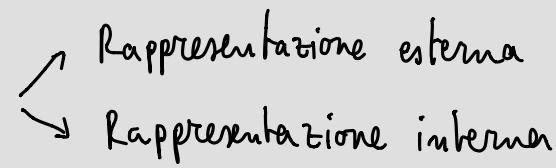
osservabilità e
ricostruibilità

stimatori
dello stato

sintesi del
regolatore



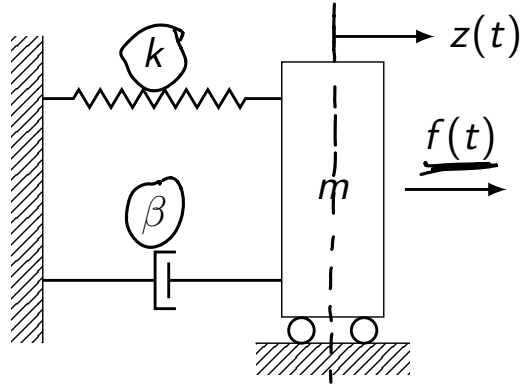
Nella scorsa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi *deterministici, dinamici, causali, lineari, tempo invariati*
- ▷ Rappresentazione di sistemi 
 - Rappresentazione esterna
 - Rappresentazione interna
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto

In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

Massa-molla-smorzatore

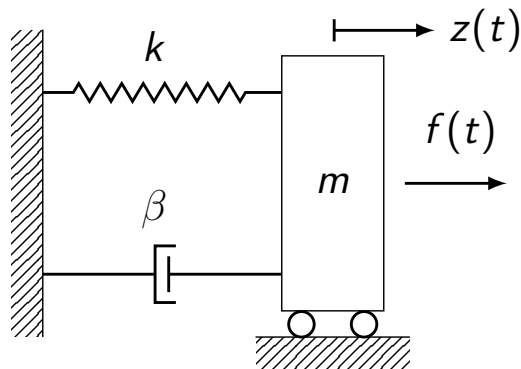


$f(t) = \text{input}, z(t) = \text{output}$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

$z=0$ molla a riposo

Massa-molla-smorzatore



Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

$f(t) = \text{input}$, $z(t) = \text{output}$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1 = z, x_2 = \dot{x}, u = f, y = x_1 = z$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

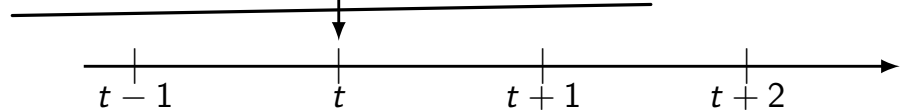
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, J = 0$$

note

Estinzione debito



pagamento rata/aggiornamento debito



$y(t)$ = debito al tempo t = output

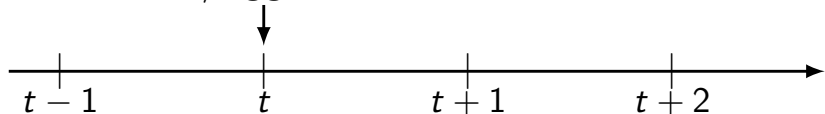
$u(t)$ = rata al tempo t = input

l = tasso di interesse (decimale)

Estinzione debito



pagamento rata/aggiornamento debito



$y(t)$ = debito al tempo t = output

$u(t)$ = rata al tempo t = input

l = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - (1+l)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(z) = -\frac{z}{z - (1+l)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = x(t) = y(t) + u(t)$$

$$F = 1 + l, G = -1 - l$$

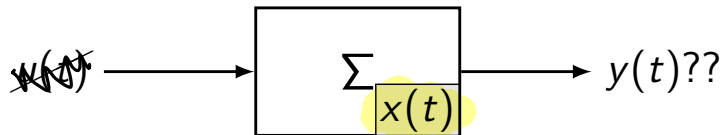
$$H = 1, J = -1$$

note

In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

Soluzioni di un sistema LTI autonomo

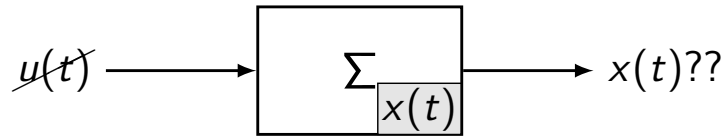


Σ lineare, tempo invariante e autonomo $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $u(t) \equiv 0$

Tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \quad \underline{x(0) = x_0}$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso scalare



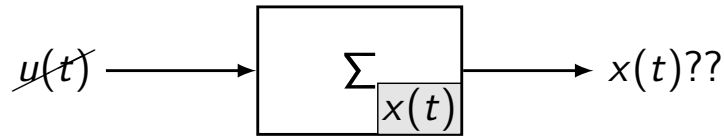
Caso scalare $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$x(t) = e^{ft} x_0$$
$$\dot{x} = f \underbrace{e^{ft} x_0}_x$$

$$\leftarrow \dot{x}(t) = f x(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = ??$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso scalare

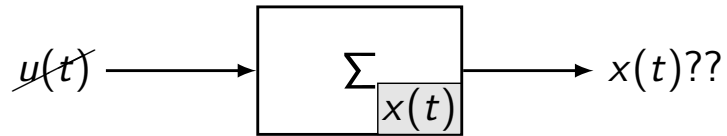


Caso scalare $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{ft} x_0 = \underbrace{\left(1 + ft + \frac{f^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{f^k t^k}{k!} + \dots \right)}_{\text{serie di Taylor}} x_0$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale



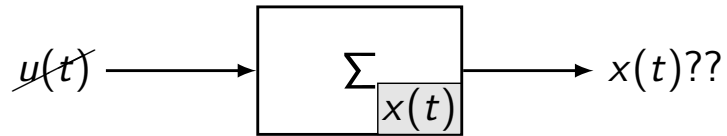
Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$ $n > 1$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

\uparrow
 $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$x(t) = ??$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale

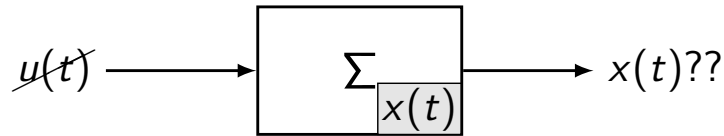


Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = \underbrace{e^{Ft}} x_0 = ??$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale



Caso vettoriale $x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft} x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{F^k t^k}{k!} + \cdots \right) x_0$$

In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

Esponenziale di matrice e sue proprietà

Definizione: L'esponenziale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

NB: e^A è sempre ben definito perché la serie $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge sempre!

Esponenziale di matrice e sue proprietà

Definizione: L'esponenziale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

NB: e^A è sempre ben definito perché la serie $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge sempre!

(Alcune) proprietà:

- ① $e^0 = I$
- ② $(e^A)^\top = e^{(A^\top)}$
- ③ $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
- ④ $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile: $e^{TAT^{-1}} = Te^A T^{-1}$

In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

caso più in generale: F diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$, $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I$, $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$, $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I$, $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

note

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

caso più in generale: F “quasi”-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I, F^1 = F, F^2 = -I, F^3 = -F, F^4 = I, \dots \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?


Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 5: $F = F^2$ idempotenti

$$F^0 = I, F^k = F, k \geq 1 \implies e^{Ft} = I + (e^t - 1)F$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione:
$$e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 6: $F = vu^T$, $v, u \in \mathbb{R}^n$


$$F^0 = I, F^k = (u^T v) F^{k-1}, k \geq 1 \implies e^{Ft} = I + \frac{(e^{u^T v t} - 1)}{u^T v} F$$

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici” e/o “strutturati”...

....ma come fare in casi più complessi (F “piena” e senza “struttura”)?

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici” e/o “strutturati”...

....ma come fare in casi più complessi (F “piena” e senza “struttura”)?

Strategia: Trasformare F in una forma “semplice” (diagonale o quasi-diagonale)!

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

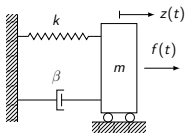
Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

🌐 [baggiogi.github.io](https://github.com/baggiogi)



$f(t) = \text{input}$, $z(t) = \text{output}$
 Rappresentazione (esterna ed) interna?

$z(t) = \text{posizione del carrello al tempo } t = \text{output}$
 $f(t) = \text{forza esterna al tempo } t = \text{input}$

Rappresentazione esterna:

$$m\ddot{z} = f(t) - k z - \beta \dot{z}$$

$$m\ddot{z} + \beta \dot{z} + k z - f(t) = 0$$

dominio Laplace \rightarrow

$$m s^2 Z(s) + \beta s Z(s) + k Z(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{m s^2 + \beta s + k}$$

Rappresentazione interna:

$x(t) = \begin{cases} \text{posizioni} \\ \text{velocità} \end{cases}$ delle masse

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad x_1(t) = z(t), \quad x_2(t) = \dot{z}(t) \quad u(t) = f(t)$$

$$\dot{x}_1 = \dot{z} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{1}{m} (-\beta \dot{z} - k z + f) = \frac{1}{m} (-\beta x_2 - k x_1 + u)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \underbrace{0}_{J} \cdot u \end{cases}$$



pagamento rata/aggiornamento debito

 $t-1$ t $t+1$ $t+2$
 $y(t)$ = debito al tempo t = output $u(t)$ = rata al tempo t = input I = tasso di interesse (decimale) $y(t)$ = debito al tempo t = output $u(t)$ = rata al tempo t = input

Rappresentazione esterna:

$$y(t+1) = (1+I)y(t) - u(t+1)$$

$$y(t+1) - (1+I)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{trasformata} \\ \text{Zeta} \end{array} \quad z Y(z) - (1+I)Y(z) = z U(z) \Rightarrow G(z) = \frac{z}{z - (1+I)} \quad \text{F.d.T.}$$

Rappresentazione interna:

$$x(t) = y(t) + u(t)$$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= y(t+1) + u(t+1) = (1+I)y(t) - \cancel{u(t+1)} + \cancel{u(t+1)} \\ &= (1+I)(x(t) - u(t)) \\ &= (1+I)x(t) - (1+I)u(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = x(t) - u(t)$$

$$\begin{cases} x(t+1) = \overbrace{(1+I)}^F x(t) - \overbrace{(1+I)}^G u(t) \\ y(t) = \underbrace{1}_H x(t) - \underbrace{1}_J u(t) \end{cases}$$

Esponenziale di matrice e sue proprietà

Definizione: L'esponenziale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

NB: e^A è sempre ben definito perché la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge sempre!

(Alcune) proprietà:

- $e^0 = I$
- $(e^A)^T = e^{A^T}$
- $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
- $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile: $e^{TAT^{-1}} = T e^A T^{-1}$

G. Baggio

Lez. 3. Soluzioni di sistemi lineari

4 Marzo 2021

$$1) e^0 = I$$

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 0^k = \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \dots$$

$$2) (e^A)^T = e^{A^T}$$

$$(e^A)^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)^T}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^T)^k}{k!} = e^{A^T}$$

$$(A \dots A)^T = A^T \dots A^T$$

$$3) A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : AB = BA \text{ (A, B commutano)} \left[\begin{array}{l} A, B \text{ commutano:} \\ (A+B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \end{array} \right]$$

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Corollari: 1) $\alpha A, \beta A \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} : e^{\alpha A + \beta A} = e^{\alpha A} e^{\beta A}$

2) $A, -A : e^{A-A} = e^A e^{-A} = e^0 = I$

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

4) $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile: $T e^A T^{-1}$

$$e^{TAT^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (TAT^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T A^k T^{-1} = T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) T^{-1} = T e^A T^{-1}$$

$$(TAT^{-1})^2 = T A T^{-1} T A T^{-1} = T A^2 T^{-1}$$

$$\vdots$$

$$(TAT^{-1})^k = T A^k T^{-1}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdot \dots \cdot F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Ft)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} t^k & 0 \\ 0 & 2^k t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (2t)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$, $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I$, $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ...

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

Osservazione: I, N commutano $IN = NI$

$$e^{Ft} = e^{(N+I)t} = e^{It} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k t^k = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} + \dots$$

$$N^2 = NN = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$
$$N^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad k \geq 2$$

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione: $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è detta nilpotente se $\exists \bar{k} \geq 1$ t.c.

$$N^{\bar{k}} = 0 \quad k \geq \bar{k}$$

Indice di nilpotenza è il più piccolo valore di \bar{k}

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N$, $N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I$, $N^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$
 (ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_N$$

Osservazione: I, N commutano

$$e^{Ft} = e^{(I+N)t} = e^{It} e^{Nt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & t^2/2 e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} N^k t^k = I + Nt + \frac{N^2}{2} t^2 + \frac{N^3}{3!} t^3 + \dots$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^3 = N^2 N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N^k = 0 \quad k \geq 3$$

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I, F^1 = F, F^2 = -I, F^3 = -F, F^4 = I, \dots \Rightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e^{Ft} ?$$

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k = I + Ft + \frac{F^2}{2} t^2 + \frac{F^3}{3!} t^3 + \frac{F^4}{4!} t^4 + \frac{F^5}{5!} t^5 + \dots$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^2 = F F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$F^3 = F^2 F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -F$$

$$F^4 = F^3 F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$F^5 = F^4 F = F$$

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k \geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 5: $F = F^2$

$$F^0 = I, F^k = F, k \geq 1 \implies e^{Ft} = I + (e^t - 1)F$$

$$F^2 = F, F \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k = I + F \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$
$$\left. \begin{array}{l} F^2 = F \\ F^3 = F^2 F = F^2 = F \\ \vdots \\ F^k = F \quad k \geq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} - 1 \\ e^t \end{array}$$
$$= I + F(e^t - 1)$$

Come calcolare e^{Ft} , $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 6: $F = vu^T$, $v, u \in \mathbb{R}^n$

$$F^0 = I, F^k = (u^T v) F^{k-1}, k \geq 1 \implies e^{Ft} = I + \frac{(e^{u^T v t} - 1)}{u^T v} F$$

$$F = vu^T \quad v, u \in \mathbb{R}^n \quad \text{ranko } 1$$

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k t^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (u^T v)^{k-1} F t^k$$

$$F = vu^T$$

$$F^2 = v(u^T v)u^T = (u^T v)vu^T = (u^T v)F$$

$$F^3 = F^2 F = (u^T v) v(u^T v)u^T = (u^T v)^2 vu^T = (u^T v)^2 F$$

\vdots

$$F^k = (u^T v)^{k-1} F \quad k \geq 1$$

$$= I + \frac{F}{(u^T v)} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (u^T v)^k t^k}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (u^T v t)^k - 1}$$
$$= I + \frac{F}{u^T v} (e^{u^T v t} - 1)$$