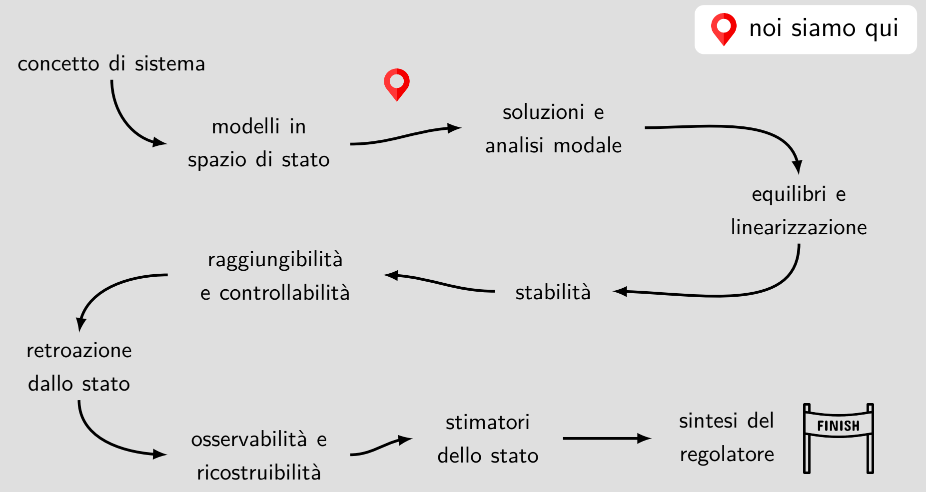
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 3: Soluzioni di sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

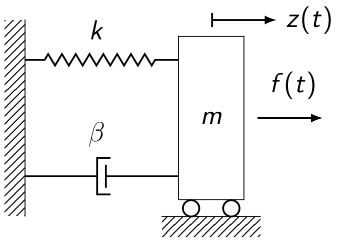
A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto
- ▷ Soluzioni di un sistema autonomo
- ▷ Esponenziale di matrice
- ▷ Calcolo dell'esponenziale di matrice: metodo diretto

Massa-molla-smorzatore



$f(t)$ = input, $z(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

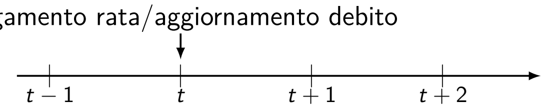
Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1 = z,\ x_2 = \dot{x},\ u = f,\ y = x_1 = z$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0$$

Estinzione debito



$y(t)$ = debito al tempo t = output
$u(t)$ = rata al tempo t = input
I = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - (1+I)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(z) = -\frac{z}{z-(1+I)}$$

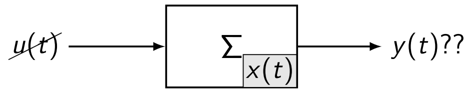
Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = x(t) = y(t) + u(t)$$

$$F = 1 + I,\ G = -1 - I$$

$$H = 1,\ J = -1$$

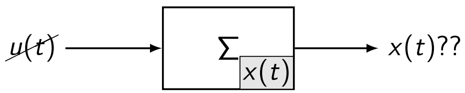
Soluzioni di un sistema LTI autonomo



Σ lineare, tempo invariante e autonomo $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ y(t) \in \mathbb{R}^p,\ u(t) \equiv 0$

Tempo continuo:
$$\dot{x}(t) = Fx(t) \qquad x(0) = x_0$$
$$y(t) = Hx(t)$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso scalare

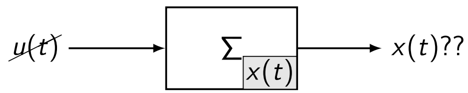


Caso scalare $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{ft}x_0 = \left(1 + ft + \frac{f^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{f^kt^k}{k!} + \ldots\right)x_0$$

Soluzioni di un sistema LTI autonomo: caso vettoriale



Caso vettoriale $\quad x(t) = y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad x(0) = x_0$$

$$x(t) = e^{Ft}x_0 \triangleq \left(I + Ft + \frac{F^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{F^kt^k}{k!} + \ldots\right)x_0$$

Esponenziale di matrice e sue proprietà

Definizione: L'esponenziale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è definito come

$$e^A \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

NB: e^A è sempre ben definito perché la serie $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge sempre!

(Alcune) proprietà:

1. $e^0 = I$
2. $(e^A)^\top = e^{(A^\top)}$
3. $AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B$
4. $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile: $e^{TAT^{-1}} = Te^A T^{-1}$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 1: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$(Ft)^n = \underbrace{F \cdot F \cdots F}_{n \text{ volte}} t^n = \begin{bmatrix} t^n & 0 \\ 0 & (2t)^n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

caso più in generale: F diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n \end{bmatrix} \implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{f_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{f_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{f_n t} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 2: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I$, $N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$,...

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\implies e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 3: $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + N, \quad N \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $N^0 = I,\ N^1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right],\ N^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \ldots$

(ii) $e^{I+N} = e^I e^N$

$$\Longrightarrow \quad e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

caso più in generale: F "quasi"-diagonale

$$F = \begin{bmatrix} f & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & f & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & f \end{bmatrix} \Longrightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{ft} & te^{ft} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{ft} \\ 0 & e^{ft} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & te^{ft} \\ 0 & \cdots & 0 & e^{ft} \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 4: $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$F^0 = I,\ F^1 = F,\ F^2 = -I,\ F^3 = -F,\ F^4 = I, \ldots \Longrightarrow e^{Ft} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$

Esempio 5: $F = F^2$

$$F^0 = I,\ F^k = F,\ k \geq 1 \Longrightarrow e^{Ft} = I + (e^t - 1)F$$

Come calcolare e^{Ft}, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Usiamo la definizione: $$e^{Ft} \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{F^k t^k}{k!}$$

Esempio 6: $F = vu^\top$, $v, u \in \mathbb{R}^n$

$$F^0 = I,\ F^k = (u^\top v)F^{k-1},\ k \geq 1 \implies e^{Ft} = I + \frac{(e^{u^\top v\, t}-1)}{u^\top v}F$$

Calcolo diretto di e^{Ft}

Metodo di calcolo diretto tramite definizione

utile in casi “semplici” e/o “strutturati”...

....ma come fare in casi più complessi (F “piena” e senza “struttura”)?

$\boxed{\text{Strategia: Trasformare } F \text{ in una forma “semplice” (diagonale o quasi-diagonale)!}}$