

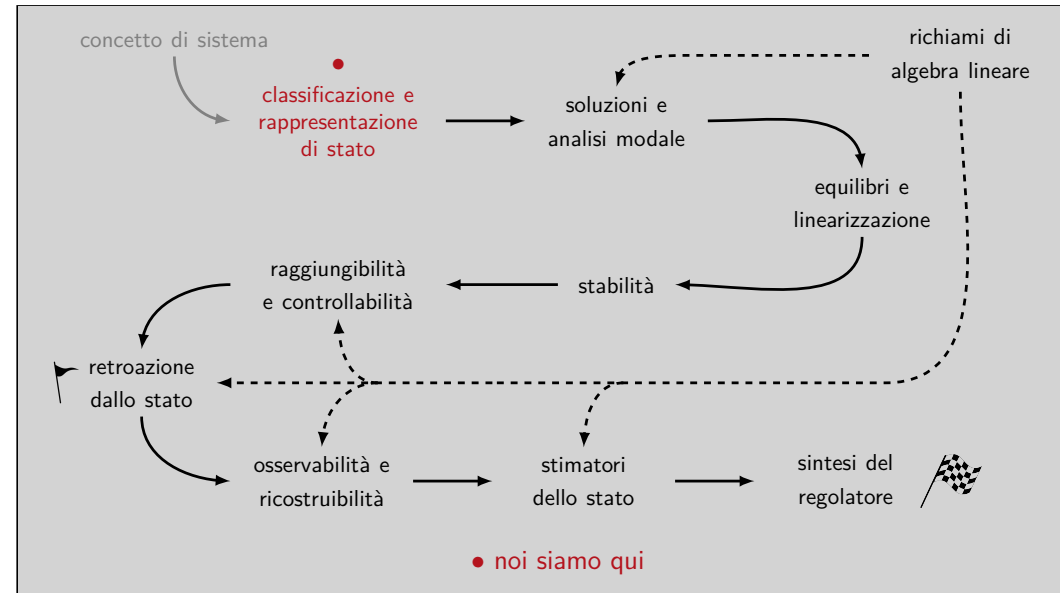
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Classificazione e Rappresentazione di Sistemi

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica  
A.A. 2019-2020



## In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo
- ▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

## Sistema

**Definizione (sistema):** Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.

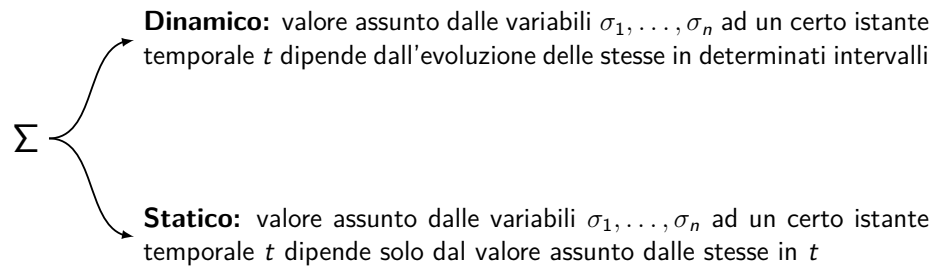


$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  variabili descrittive d'interesse

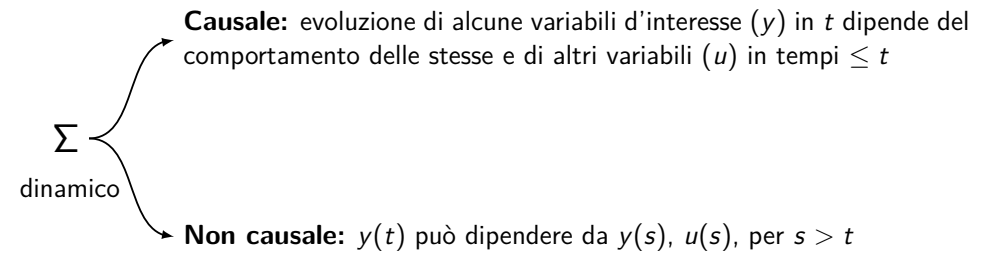
**Esempio:**  $\Sigma$  = appartamento,  $\sigma_1$  = temp. cucina,  $\sigma_2$  = temp. soggiorno, ...



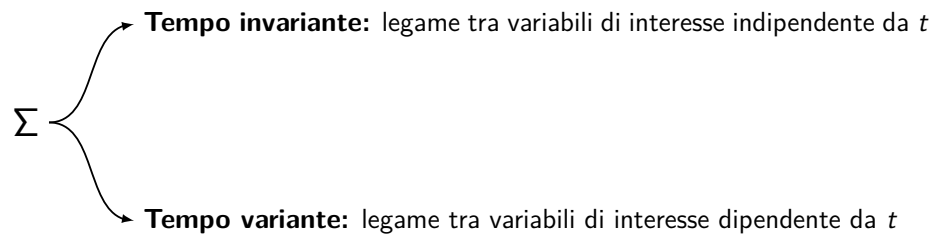
## Classificazione dei sistemi



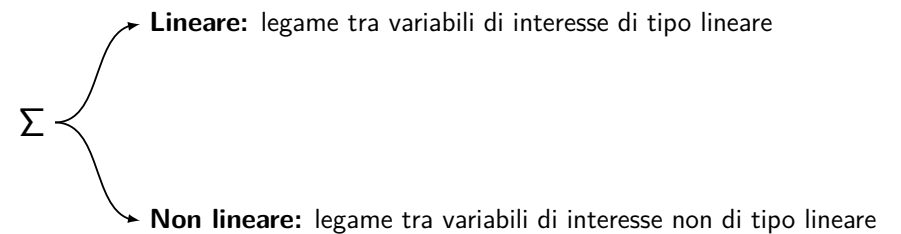
## Classificazione dei sistemi



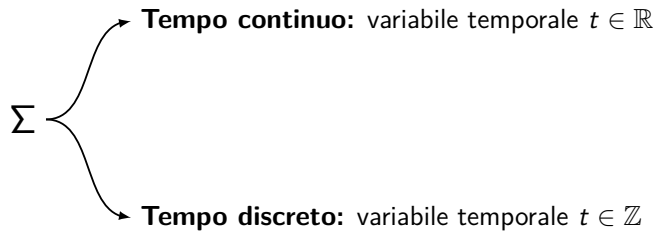
## Classificazione dei sistemi



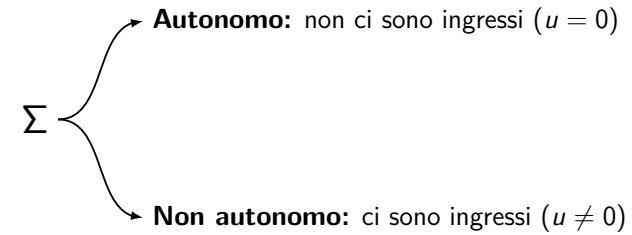
## Classificazione dei sistemi



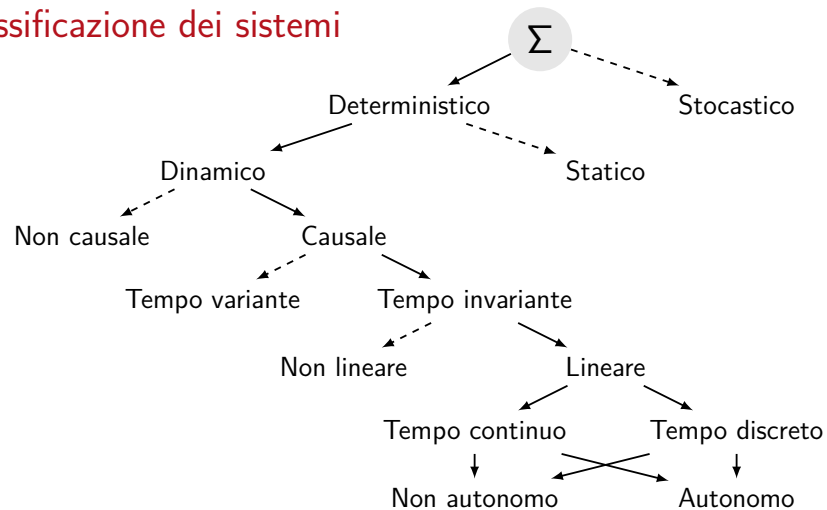
## Classificazione dei sistemi



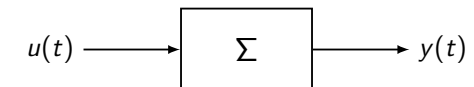
## Classificazione dei sistemi



## Classificazione dei sistemi



## Rappresentazione esterna o I/O



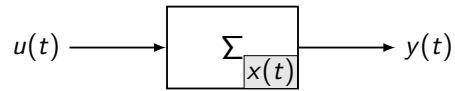
Tempo continuo:  $h(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t), t) = 0 + \text{c.i.}$

$\Sigma$  lineare tempo invariante: F.d.T. (Laplace)  $G(s) = Y(s)/U(s)$

Tempo discreto:  $h(y(t-t_n), \dots, y(t-1), y(t), u(t-t_m), \dots, u(t-1), u(t), t) = 0 + \text{c.i.}$

$\Sigma$  lineare tempo invariante: F.d.T. (Zeta)  $G(z) = Y(z)/U(z)$

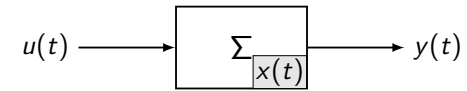
## Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$  = (vettore di) variabili di stato (*memoria interna!*)

**Proprietà di separazione:**  $x(t)$  fornisce tutta l'informazione sulla storia passata di  $\Sigma$  necessaria per valutare  $x(t)$  e  $y(t)$  ad istanti futuri (una volta noto  $u(t)$ ).

## Rappresentazione interna o di stato



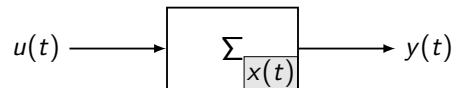
$x(t)$  = (vettore di) variabili di stato (*memoria interna!*)

Tempo continuo:  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$   $x(t_0) = x_0$   
 $y(t) = h(x(t), u(t), t)$

$f$  = mappa di transizione di stato

$h$  = mappa di uscita

## Rappresentazione interna o di stato



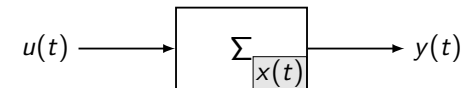
$x(t)$  = (vettore di) variabili di stato (*memoria interna!*)

Tempo discreto:  $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$   $x(t_0) = x_0$   
 $y(t) = h(x(t), u(t), t)$

$f$  = mappa di transizione di stato

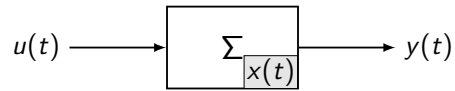
$h$  = mappa di uscita

## Sistemi LTI in spazio di stato



$\Sigma$  lineare e tempo invariante  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$

## Sistemi LTI in spazio di stato

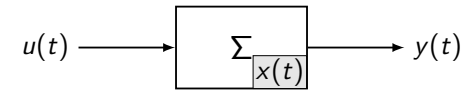


$\Sigma$  lineare e tempo invariante  $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \quad x(t_0) = x_0$$

## Sistemi LTI in spazio di stato

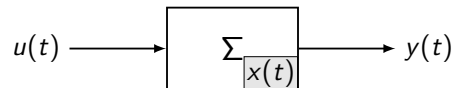


$\Sigma$  lineare e tempo invariante  $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \quad x(t_0) = x_0$$

## Sistemi LTI in spazio di stato



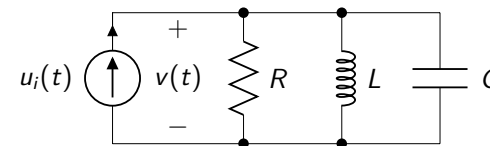
$\Sigma$  lineare e tempo invariante  $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$

### Sovrapposizione degli effetti

$x', y'$  = stato, uscita di  $\Sigma$  con stato iniziale  $x'_0$  e ingresso  $u'$   
 $x'', y''$  = stato, uscita di  $\Sigma$  con stato iniziale  $x''_0$  e ingresso  $u''$

$$x_0 = \alpha_1 x'_0 + \alpha_2 x''_0, u = \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \implies x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'', y = \alpha_1 y' + \alpha_2 y''$$

## Circuito RLC



$u_i(t)$  = input,  $v(t)$  = output  
 Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

F.d.T.  $G(s) = \frac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$

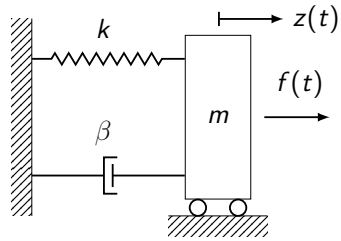
Rappresentazione interna (di stato)

$x_1 = v, x_2 = i_L, u = u_i, y = x_1 = v$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, J = 0$$

## Massa-molla-smorzatore



$f(t)$  = input,  $z(t)$  = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

Rappresentazione interna (di stato)

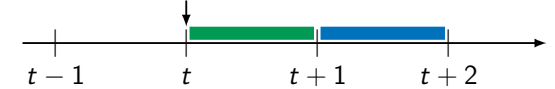
$$x_1 = z, x_2 = \dot{x}, u = f, y = x_1 = z$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, J = 0$$

## Magazzino merci

ordine di acquisto/richiesta di consegna



$y(t)$  = quantità merce in magazzino al tempo  $t$   
 $u_1(t)$  = quantità merce ordinata (in entrata) al tempo  $t$   
 $u_2(t)$  = quantità merce richiesta (in uscita) al tempo  $t$

$u_1(t), u_2(t)$  = input,  $y(t)$  = output

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G_1(z) = \frac{z^{-1}}{z-1}, G_2(z) = -\frac{1}{z-1}$$

Rappresentazione interna (di stato)

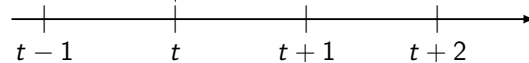
$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = u_1(t-1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Estinzione debito

pagamento rata/aggiornamento debito



$y(t)$  = debito al tempo  $t$  = output  
 $u(t)$  = rata al tempo  $t$  = input  
 $l$  = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - (1+l)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(z) = -\frac{z}{z - (1+l)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = x(t) = y(t) + u(t)$$

$$F = 1 + l, G = -1 - l$$

$$H = 1, J = -1$$