

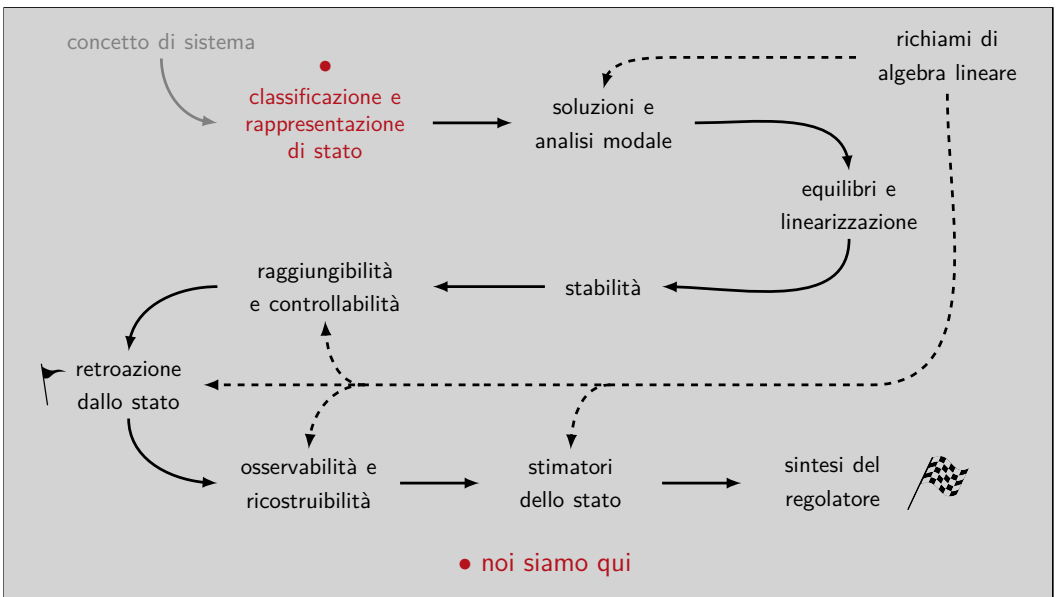
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Classificazione e Rappresentazione di Sistemi

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



In questa lezione

▷ Classificazione di sistemi

▷ Rappresentazione di sistemi

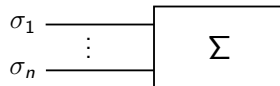
▷ Sistemi lineari in spazio di stato

▷ Esempi di sistemi a tempo continuo

▷ Esempi di sistemi a tempo discreto

Sistema

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.

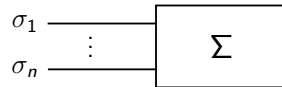


$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

Esempio: Σ = appartamento, σ_1 = temp. cucina, σ_2 = temp. soggiorno, ...

Sistema

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.

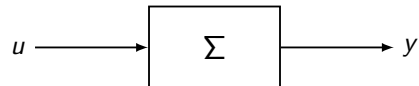


$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

$\Sigma =$ Modello matematico che descrive la relazione tra $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

Sistema

Definizione (sistema): Un qualunque oggetto fisico o artificiale il cui comportamento temporale è descritto da un insieme di variabili che interagiscono tra di loro.



In molti casi in $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ si possono distinguere variabili di:

ingresso/input u (causa)

uscita/output y (effetto)

Esempio: automobile: $u =$ pedale acc. / sterzo, $y =$ posizione / velocità veicolo
motore elettrico: $u =$ tensione / corrente armatura, $y =$ posizione / velocità rotore

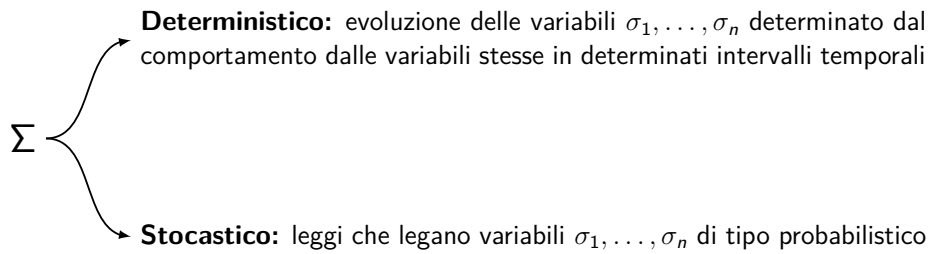
Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Capire il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) **controllarlo!**

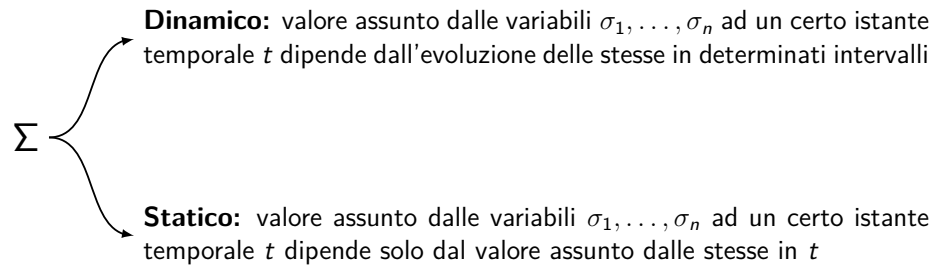
Ma perché usare la matematica?

Fornisce strumenti che permettono di descrivere e analizzare in maniera **quantitativa** il comportamento di Σ

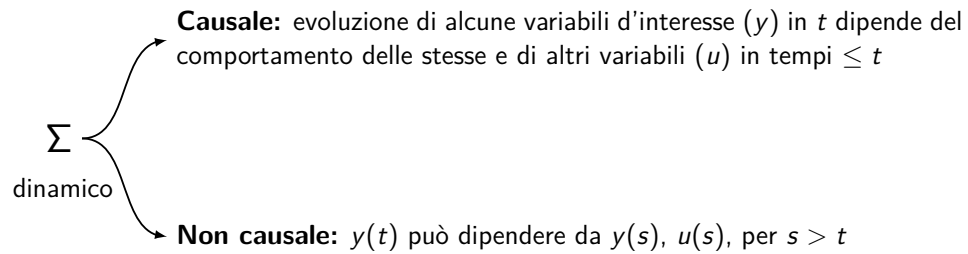
Classificazione dei sistemi



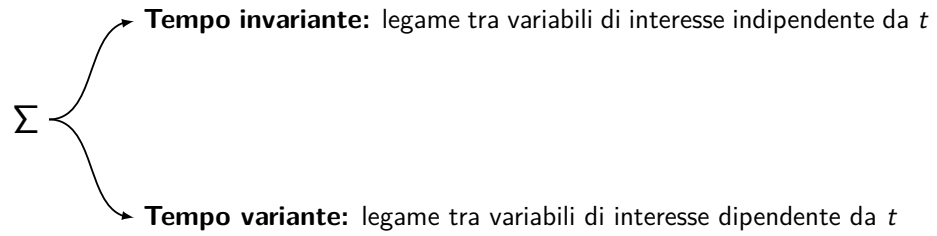
Classificazione dei sistemi



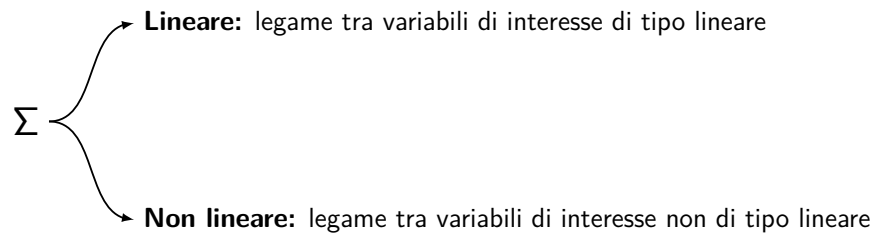
Classificazione dei sistemi



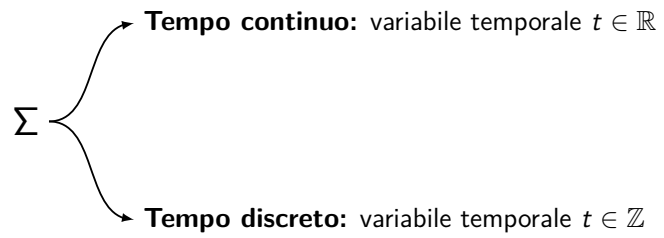
Classificazione dei sistemi



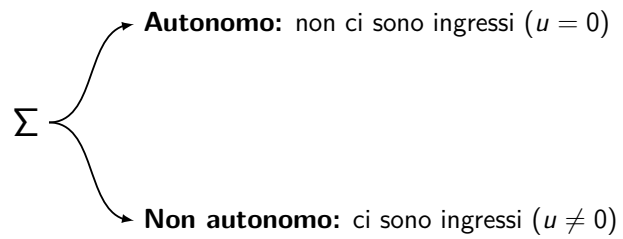
Classificazione dei sistemi



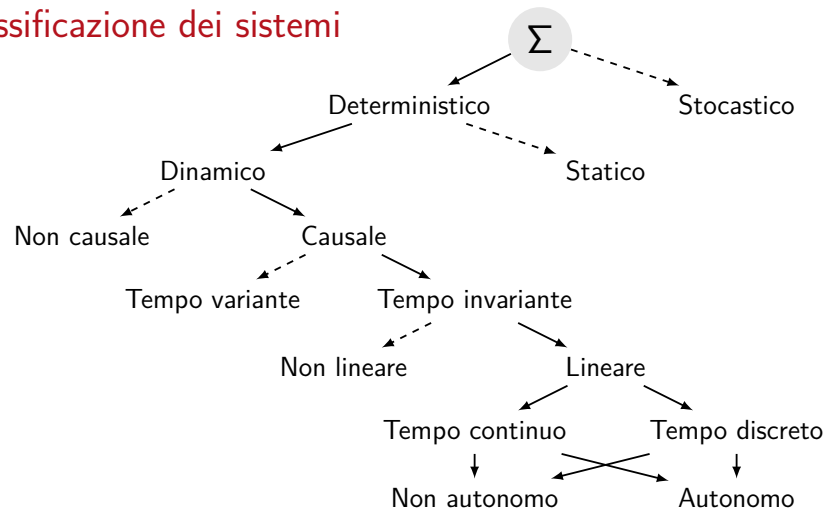
Classificazione dei sistemi



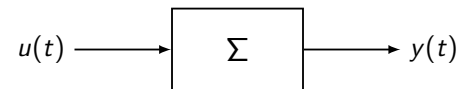
Classificazione dei sistemi



Classificazione dei sistemi



Rappresentazione esterna o I/O



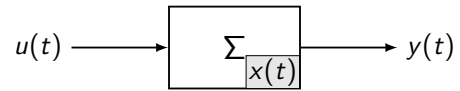
Tempo continuo: $h(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t), t) = 0 + \text{c.i.}$

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Laplace) $G(s) = Y(s)/U(s)$

Tempo discreto: $h(y(t-t_n), \dots, y(t-1), y(t), u(t-t_m), \dots, u(t-1), u(t), t) = 0 + \text{c.i.}$

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Zeta) $G(z) = Y(z)/U(z)$

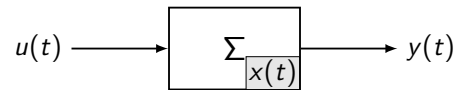
Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (*memoria interna!*)

Proprietà di separazione: $x(t)$ fornisce tutta l'informazione sulla storia passata di Σ necessaria per valutare $x(t)$ e $y(t)$ ad istanti futuri (una volta noto $u(t)$).

Rappresentazione interna o di stato



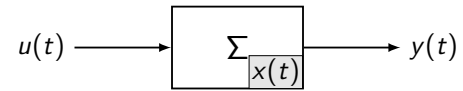
$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (*memoria interna!*)

Tempo continuo: $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ $x(t_0) = x_0$
 $y(t) = h(x(t), u(t), t)$

f = mappa di transizione di stato

h = mappa di uscita

Rappresentazione interna o di stato



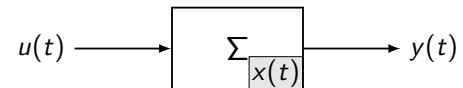
$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (*memoria interna!*)

Tempo discreto: $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$ $x(t_0) = x_0$
 $y(t) = h(x(t), u(t), t)$

f = mappa di transizione di stato

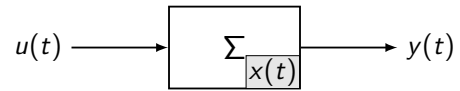
h = mappa di uscita

Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

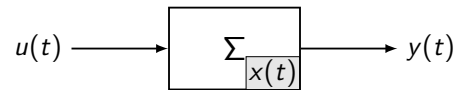
Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo continuo: $\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$ $x(t_0) = x_0$
 $y(t) = Hx(t) + Ju(t)$

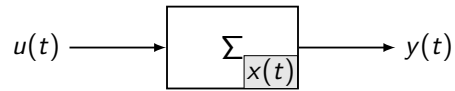
Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo discreto: $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$ $x(t_0) = x_0$
 $y(t) = Hx(t) + Ju(t)$

Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

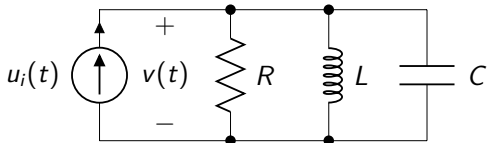
Sovrapposizione degli effetti

x' , y' = stato, uscita di Σ con stato iniziale x'_0 e ingresso u'

x'' , y'' = stato, uscita di Σ con stato iniziale x''_0 e ingresso u''

$$x_0 = \alpha_1 x'_0 + \alpha_2 x''_0, u = \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \implies x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'', y = \alpha_1 y' + \alpha_2 y''$$

Circuito RLC



$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$$

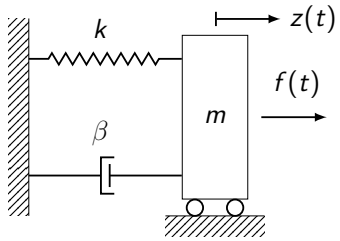
Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1 = v, x_2 = i_L, u = u_i, y = x_1 = v$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, J = 0$$

Massa-molla-smorzatore



$f(t)$ = input, $z(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz - f = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$

Rappresentazione interna (di stato)

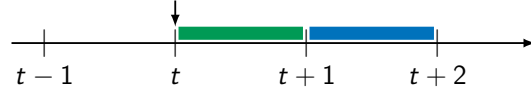
$$x_1 = z, x_2 = \dot{x}, u = f, y = x_1 = z$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, J = 0$$

Magazzino merci

ordine di acquisto/richiesta di consegna



$y(t)$ = quantità merce in magazzino al tempo t

$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al tempo t

$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al tempo t

$u_1(t), u_2(t)$ = input, $y(t)$ = output

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G_1(z) = \frac{z^{-1}}{z-1}, G_2(z) = -\frac{1}{z-1}$$

Rappresentazione interna (di stato)

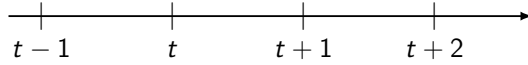
$$x_1(t) = y(t), x_2(t) = u_1(t-1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estinzione debito

pagamento rata/aggiornamento debito



$y(t)$ = debito al tempo t = output
 $u(t)$ = rata al tempo t = input
 l = tasso di interesse (decimale)

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - (1+l)y(t) + u(t+1) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(z) = -\frac{z}{z - (1+l)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = x(t) = y(t) + u(t)$$

$$F = 1 + l, G = -1 - l$$

$$H = 1, J = -1$$

