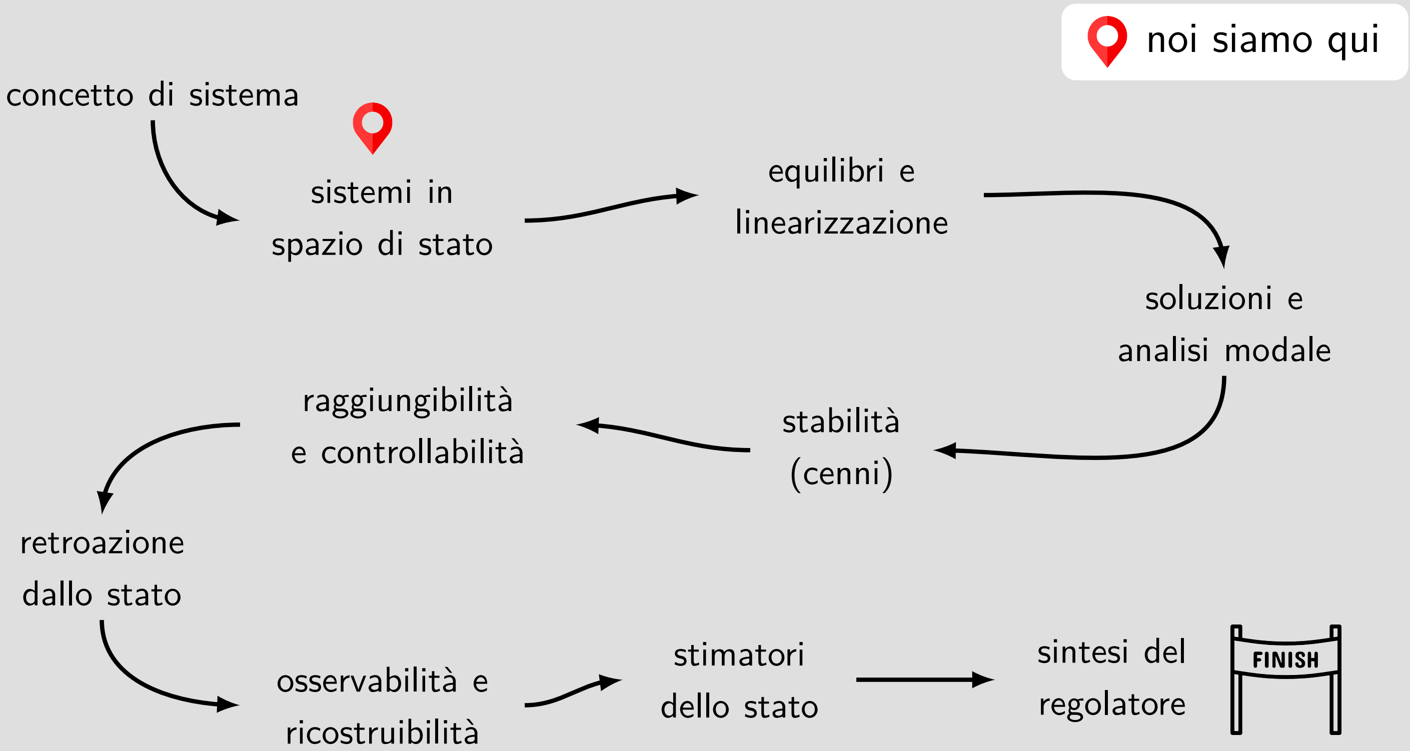
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Sistemi in spazio di stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

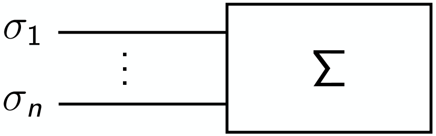
- Che cos'è la Teoria dei Sistemi? SISTEMA = MODELLO MATEMATICO
- Perché studiare la Teoria dei Sistemi? → SIMULAZIONE, ANALISI, CONTROLLO
- Programma indicativo e testi di riferimento
- Qualche informazione utile su lezioni ed esami

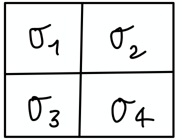
In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato RAPPRESENTAZIONE INTERNA
- ▷ Sistemi in spazio di stato in Matlab®

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.



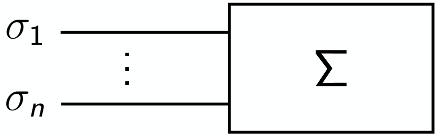


$\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

Esempio: $\Sigma =$ appartamento, $\sigma_1 =$ temp. cucina, $\sigma_2 =$ temp. soggiorno, ...

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.

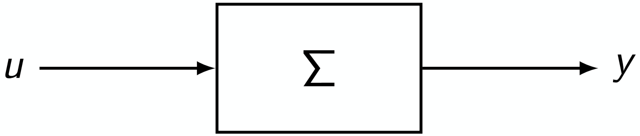


$\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

$$\boxed{\Sigma = \text{Modello matematico che descrive l'evoluzione di } \sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n}$$

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.



In molti casi in $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ si possono distinguere variabili di:

ingresso/input u (causa) uscita/output y (effetto)

Esempio: automobile: u = pedale acc. / sterzo, y = posizione / velocità veicolo
motore elettrico: u = tensione / corrente armatura, y = posizione / velocità rotore

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Capire il funzionamento di Σ per poi **controllarlo**!

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

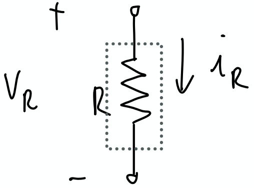
Capire il funzionamento di Σ per poi **controllarlo**!

N.B. La Matematica sembra essere il linguaggio "naturale" per descrivere fenomeni fisici e ingegneristici

Classificazione dei sistemi

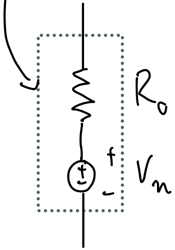
Σ

Deterministico: comportamento di Σ descritto da leggi deterministiche



Legge di Ohm: $V_R(t) = R\, i_R(t)$

Stocastico: comportamento di Σ descritto da leggi probabilistiche



$V_R(t) = R_0\, i_R(t) + V_n$

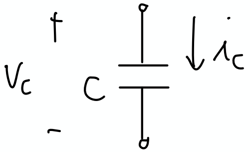
V_n = rumore termico $\sim \mathcal{D}$ distribuzione di probabilità

Classificazione dei sistemi

Σ

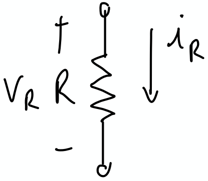
Dinamico: valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende dall'evoluzione delle stesse in determinati intervalli

passati/futuri



$$C \frac{dv_c}{dt} = i_c \qquad v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(\tau)\, d\tau + v_c(0)$$

Statico: valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende solo dal valore assunto dalle stesse in t



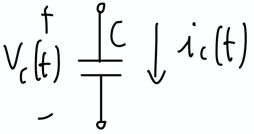
$$v_R(t) = R\, i_R(t)$$

Classificazione dei sistemi

Σ

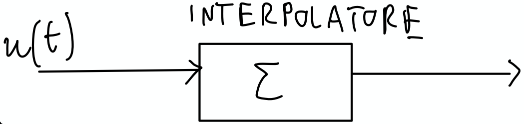
dinamico

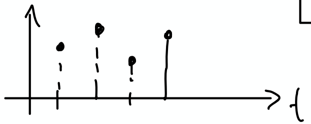
Causale: valore assunto da alcune variabili d'interesse (y) al tempo t dipende dal valore delle stesse e/o di altri variabili (u) in tempi $\leq t$



$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(\tau)\, d\tau + V_c(0)$$

Non causale: $y(t)$ può dipendere da $y(s)$, $u(s)$, per $s > t$





$$y(t) = a_{-1}u(t-1) + a_0 u(t) + a_{+1}u(t+1)$$

digital signal processing

Classificazione dei sistemi

Σ

Tempo invariante: legge che lega variabili di interesse indipendente da t

$$v_R(t) = R\, i_R(t)$$

$\hookrightarrow$ R indipendente da t (intervalli "brevi")

Tempo variante: legge che lega variabili di interesse dipendente da t

$$v_R(t) = R(t)\, i_R(t)$$

$\hookrightarrow$ tempo-varianza legata all'invecchiamento dei componenti

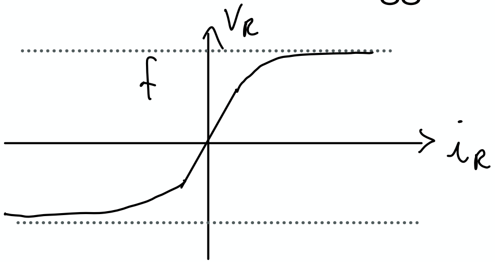
Classificazione dei sistemi

Σ

Lineare: legge che lega variabili di interesse di tipo lineare

$$v_R(t) = R\, i_R(t)$$

Non lineare: legge che lega variabili di interesse non di tipo lineare

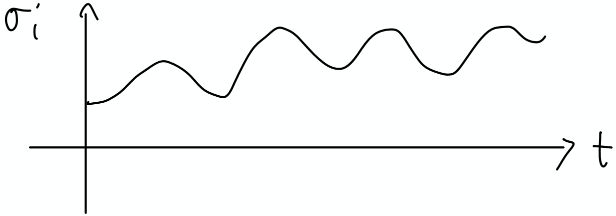


$$v_R(t) = f(i_R(t))$$

Classificazione dei sistemi

Σ

Tempo continuo: variabile temporale $t \in \mathbb{R}$

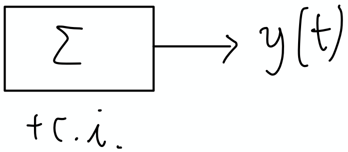


Tempo discreto: variabile temporale $t \in \mathbb{Z}$

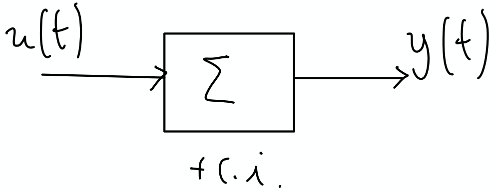
Classificazione dei sistemi

Σ
I/O

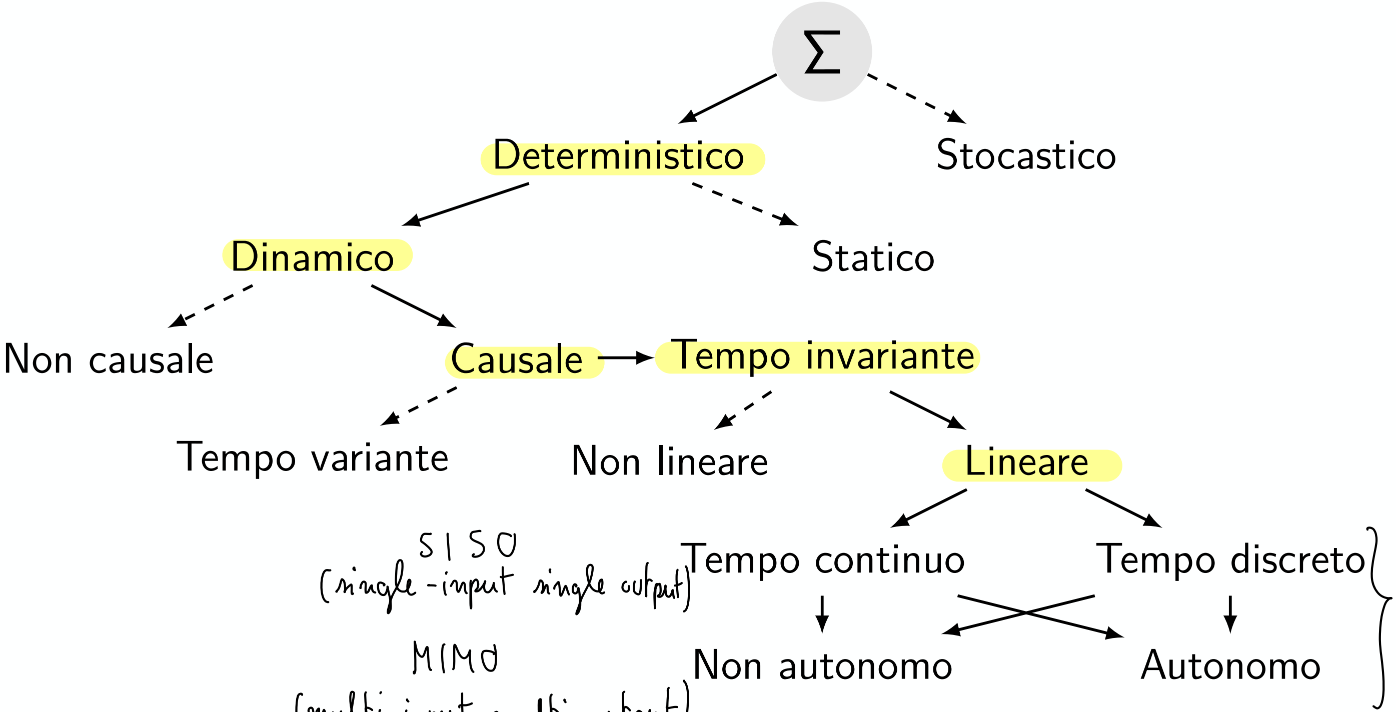
Autonomo: non ci sono ingressi ($u = 0$)



Non autonomo: ci sono ingressi ($u \neq 0$)



Classificazione dei sistemi



SISO
(single-input single output)

MIMO
(multi-input multi-output)

In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Sistemi in spazio di stato in Matlab®

Rappresentazione esterna o I/O

$y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dt^n}$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow y(t)$$

funzione (non lineare)

Tempo continuo: $h\left(y^{(n)}, \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, \dot{u}(t), u(t), t\right) = 0 + \text{c.i.}$

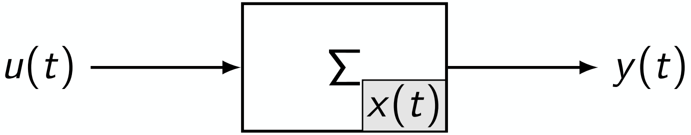
Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Laplace) $W(s) = Y(s)/U(s)$ (caso SISO)

↳ eq. diff. lineare a coeff. costanti $\longrightarrow$ $Y(s) = W(s)\,U(s)$ (c.i. nulle)

Tempo discreto: $h\,(y(t-t_n), \ldots, y(t-1), y(t), u(t-t_m), \ldots, u(t-1), u(t), t) = 0 + \text{c.i.}$

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Zeta) $W(z) = Y(z)/U(z)$

Rappresentazione interna o di stato

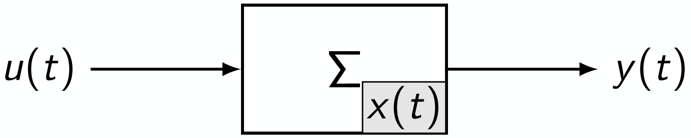


$x(t) =$ (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

Proprietà di separazione: $x(t)$ fornisce tutta l'informazione sulla storia passata di Σ necessaria per valutare $x(t)$ e $y(t)$ ad istanti futuri (una volta noto $u(t)$).

$x(t) =$ informazione "minima" riguardo alla storia passata del sistema che ci permette di ricostruire l'evoluzione futura

Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

eq. prim'ordine

eq. dinamica

Tempo continuo:

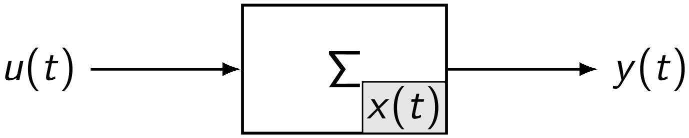
$$\dot{x}(t) = \underline{f}(x(t), u(t), t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = \underline{h}(x(t), u(t), t)$$

eq. statica

f = mappa di transizione di stato

h = mappa di uscita

Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

Tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

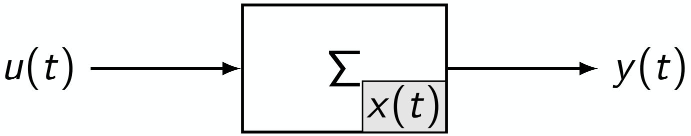
f = mappa di transizione di stato

h = mappa di uscita

In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Sistemi in spazio di stato in Matlab®

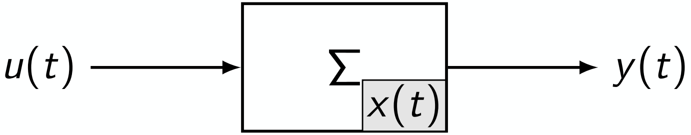
Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI) in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

note

Sistemi LTI in spazio di stato

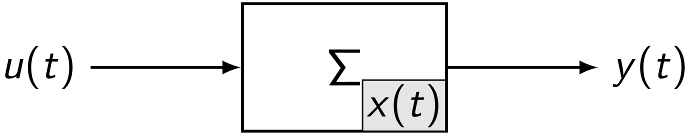


Σ lineare e tempo invariante $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

Sistemi LTI in spazio di stato

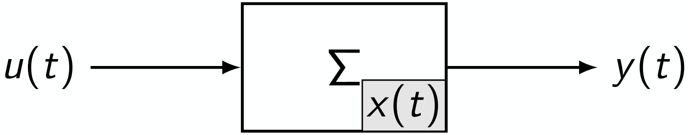


Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Sovrapposizione degli effetti

$x',\ y'$ = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0' e ingresso u'

$x'',\ y''$ = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0'' e ingresso u''

$$\boxed{x_0 = \alpha_1 x_0' + \alpha_2 x_0'',\ u = \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \implies x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'',\ y = \alpha_1 y' + \alpha_2 y''}$$

Perché lo spazio di stato?

- Rappresentazione “naturale” per molti sistemi fisici (meccanici/elettrici)
- Si lavora direttamente nel dominio temporale evitando trasformate/antitrasformate
- Si gestiscono più facilmente sistemi MIMO (multi-input multi-output)
- Problemi di analisi e controllo diventano più facili da un punto di vista numerico
- La teoria dei controlli “moderna” si basa sullo spazio di stato

In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Sistemi in spazio di stato in Matlab®

Comandi Matlab® – Control System Toolbox

$n(s) = s^2 + 3s \longrightarrow num = [1 \;\; 3 \;\; 0]$

`sys = tf(num,den)`	crea oggetto sistema LTI a tempo continuo descritto da FdT con numeratore `num` e denominatore `den` (**N.B.** `num`/`den` contengono coefficienti dei polinomi a num./den. ordinati per potenze decrescenti);
`sys = tf(num,den,Ts)`	crea oggetto sistema LTI a tempo discreto descritto da FdT con numeratore `num` e denominatore `den` e tempo di campionamento `Ts`;
`[num,den,Ts] = tfdata(sys)`	estrae numeratore e denominatore (e tempo di camp. `Ts` se a tempo discreto) della FdT che descrive sistema LTI `sys`;

Comandi Matlab® – Control System Toolbox

`sys = ss(F,G,H,J)`	crea oggetto sistema LTI in spazio di stato a tempo continuo;
`sys = ss(F,G,H,J,Ts)`	crea oggetto sistema in spazio di stato a tempo discreto con tempo di campionamento `Ts` (**N.B.** mettere `Ts=-1` per lasciare non specificato il tempo di campionamento);
`[F,G,H,J,Ts] = ssdata(sys)`	estrae matrici di stato (e tempo di camp. `Ts`, se a tempo discreto) da sistema LTI `sys`;

Comandi Matlab® – Control System Toolbox

`sys = ss(F,G,H,J)`	crea oggetto sistema LTI in spazio di stato a tempo continuo;
`sys = ss(F,G,H,J,Ts)`	crea oggetto sistema in spazio di stato a tempo discreto con tempo di campionamento `Ts` (**N.B.** mettere `Ts=-1` per lasciare non specificato il tempo di campionamento);
`[F,G,H,J,Ts] = ssdata(sys)`	estrae matrici di stato (e tempo di camp. `Ts`, se a tempo discreto) da sistema LTI `sys`;

N.B. `tf` e `ss` possono essere anche usati per convertire un sistema LTI `sys` da rappresentazione in spazio di stato a FdT, e viceversa.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Sistemi in spazio di stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI) in spazio di stato

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(t)$$

Σ lineare e tempo invariante $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Σ lineare tempo invariante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_{11} x_1(t) + f_{12} x_2(t) + \dots + f_{1n} x_n(t) + g_{11} u_1(t) + \dots + g_{1m} u_m(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_{n1} x_1(t) + \dots \dots + f_{nn} x_n(t) + g_{n1} u_1(t) + \dots + g_{nm} u_m(t) \\ y_1(t) = h_{11} x_1(t) + \dots + h_{1n} x_n(t) + j_{11} u_1(t) + \dots + j_{1m} u_m(t) \\ \vdots \\ y_p(t) = h_{p1} x_1(t) + \dots + h_{pn} x_n(t) + j_{p1} u_1(t) + \dots + j_{pm} u_m(t) \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{matrice di stato}$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} = \text{matrice degli ingressi}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{p1} & \cdots & h_{pn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n} = \text{matrice delle uscite}$$

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{p1} & \cdots & j_{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m} = \text{matrice di feed-forward}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$