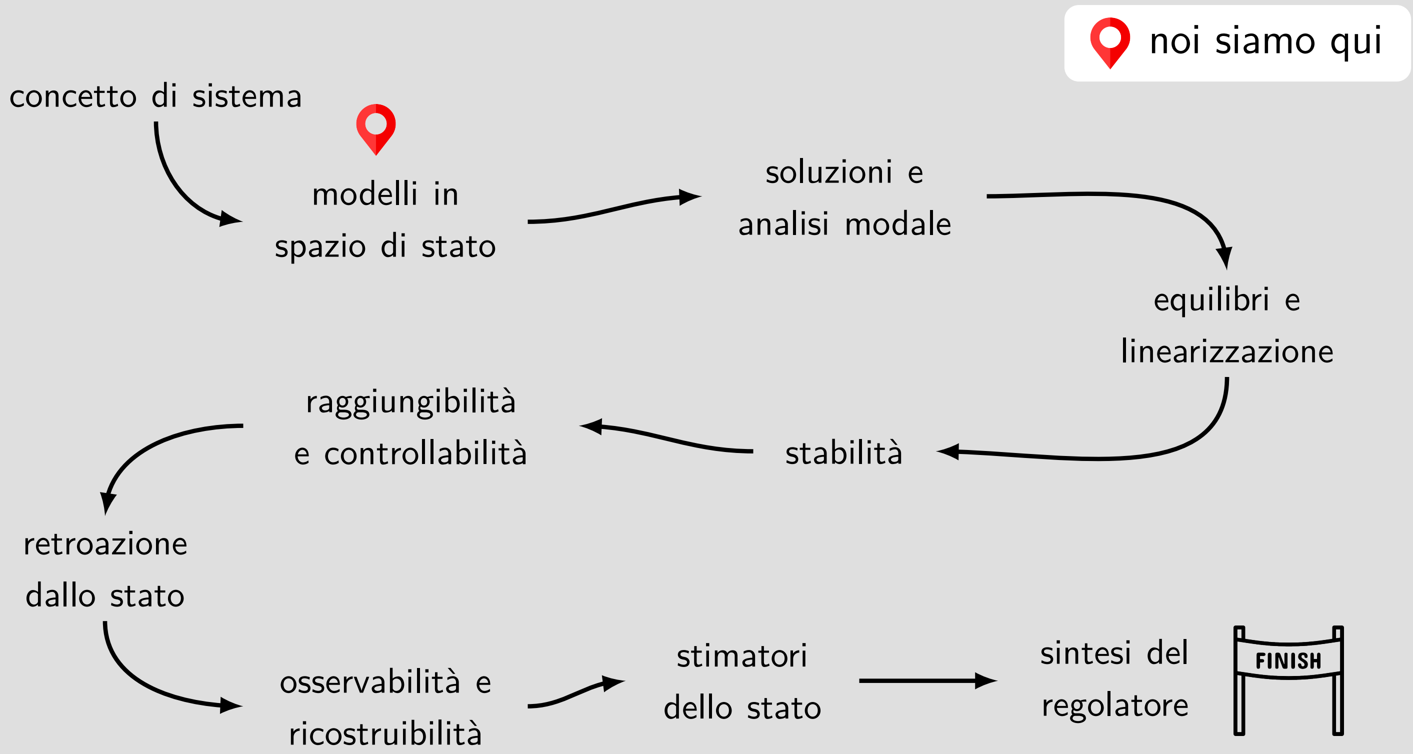
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Sistemi in spazio di stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

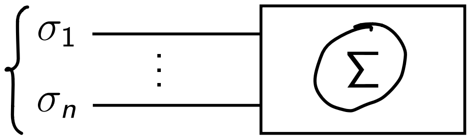
- ▷ Che cos'è la Teoria dei Sistemi? Sistema = Modello matematico
- ▷ Perché studiare la Teoria dei Sistemi? → per tentativi → basato sul modello
- ▷ Programma indicativo e testi di riferimento
- ▷ Qualche informazione utile su lezioni ed esami

In questa lezione

- Classificazione di sistemi
- Rappresentazione di sistemi
- Sistemi lineari in spazio di stato
- Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.

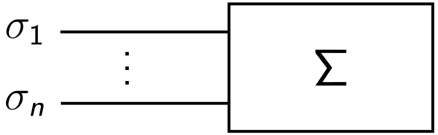


$\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

Esempio: $\Sigma =$ appartamento, $\sigma_1 =$ temp. cucina, $\sigma_2 =$ temp. soggiorno, ...

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.



$\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

$$\boxed{\Sigma = \text{Modello matematico che descrive l'evoluzione di } \sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n}$$

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.

$$u \longrightarrow \boxed{\;\Sigma\;} \longrightarrow y$$

In molti casi in $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_n$ si possono distinguere variabili di:

ingresso/input u (causa) uscita/output y (effetto)

Esempio: automobile: $u =$ pedale acc. / sterzo, $y =$ posizione / velocità veicolo
motore elettrico: $u =$ tensione / corrente armatura, $y =$ posizione / velocità rotore

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Capire il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) **controllarlo**!

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

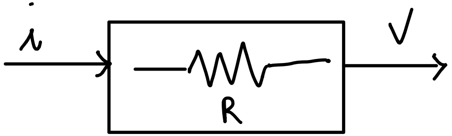
Capire il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) **controllarlo**!

N.B. La Matematica è il linguaggio naturale per studiare Σ da un punto di vista quantitativo/ingegneristico.

Classificazione dei sistemi

Σ

Deterministico: comportamento di Σ descritto da leggi deterministiche



$$v(t) = R\, i(t)$$

Stocastico: comportamento di Σ descritto da leggi probabilistiche

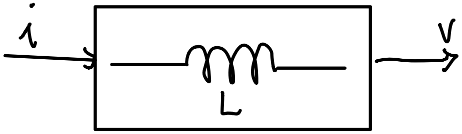
$R = \bar{R} + n(t) \rightsquigarrow$ rumore termico $\sim$ distribuzione di prob.

$$v(t) = (\bar{R} + n(t))\, i(t)$$

Classificazione dei sistemi

Σ

Dinamico: valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende dall'evoluzione delle stesse in determinati intervalli



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Statico: valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende solo dal valore assunto dalle stesse in t

$$v(t) = R\, i(t)$$

Classificazione dei sistemi

Causale: valore assunto da alcune variabili d'interesse (y) al tempo t dipende dal valore delle stesse e/o di altri variabili (u) in tempi $\leq t$

Σ

dinamico

Non causale: $y(t)$ può dipendere da $y(s)$, $u(s)$, per $s > t$

$\hookrightarrow$ signal processing (interpolatore)

Classificazione dei sistemi

Σ

Tempo invariante: legge che lega variabili di interesse indipendente da t

$v(t) = f(i(t)) = R\, i(t)$

Tempo variante: legge che lega variabili di interesse dipendente da t

$R(t)$ = resistenza tempo variante

$v(t) = R(t)\, i(t) = f(i(t), t)$

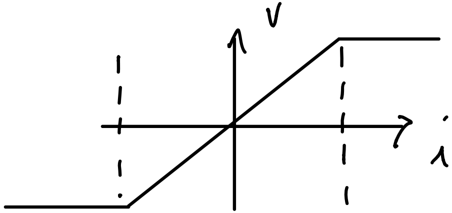
Classificazione dei sistemi

Σ

Lineare: legge che lega variabili di interesse di tipo lineare

$$v(t) = R\,i(t)$$

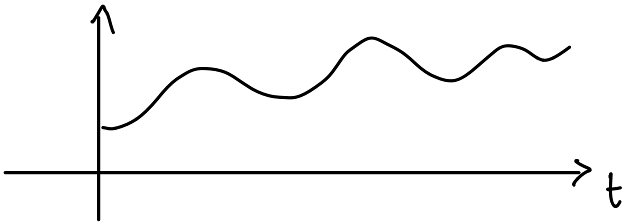
Non lineare: legge che lega variabili di interesse non di tipo lineare



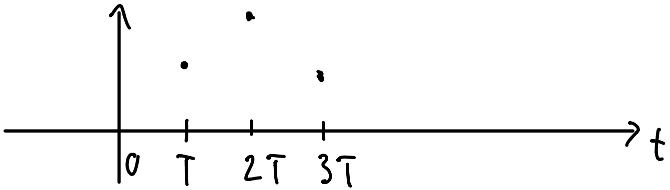
Classificazione dei sistemi

Σ

Tempo continuo: variabile temporale $t \in \mathbb{R}$



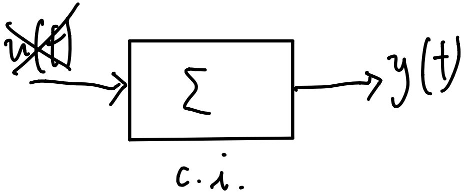
Tempo discreto: variabile temporale $\underline{t \in \mathbb{Z}}$



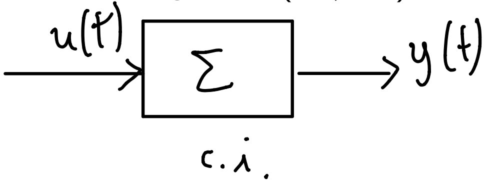
Classificazione dei sistemi

Σ

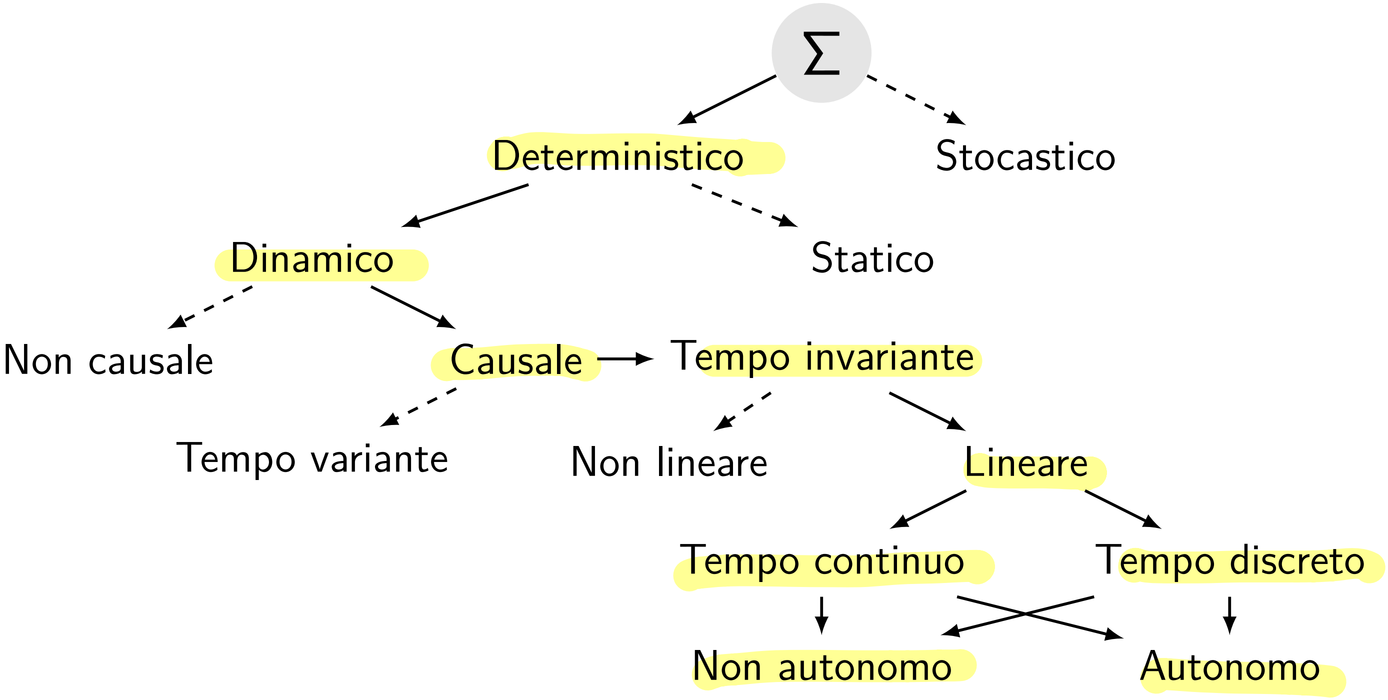
Autonomo: non ci sono ingressi ($u = 0$)



Non autonomo: ci sono ingressi ($u \neq 0$)



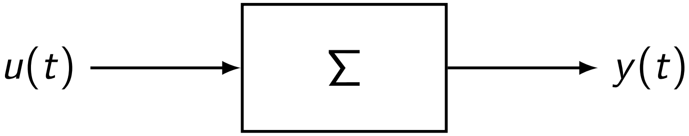
Classificazione dei sistemi



In questa lezione

- Classificazione di sistemi
- Rappresentazione di sistemi
- Sistemi lineari in spazio di stato
- Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto

Rappresentazione esterna o I/O



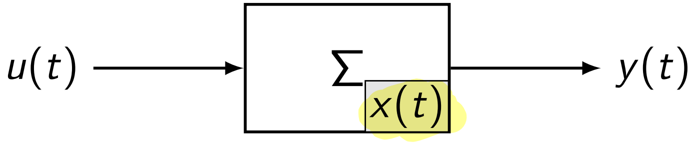
Tempo continuo: $h\left(y^{(n)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, \dot{u}(t), u(t), t\right) = 0 +$ c.i.

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Laplace) $G(s) = Y(s)/U(s)$

Tempo discreto: $h\,(y(t-t_n), \ldots, y(t-1), y(t), u(t-t_m), \ldots, u(t-1), u(t), t) = 0 +$ c.i.

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Zeta) $G(z) = Y(z)/U(z)$

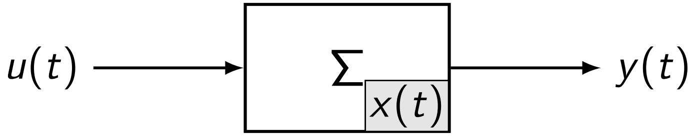
Rappresentazione interna o di stato



$x(t) =$ (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

Proprietà di separazione: $x(t)$ fornisce tutta l'informazione sulla storia passata di Σ necessaria per valutare $x(t)$ e $y(t)$ ad istanti futuri (una volta noto $u(t)$).

Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

Tempo continuo:

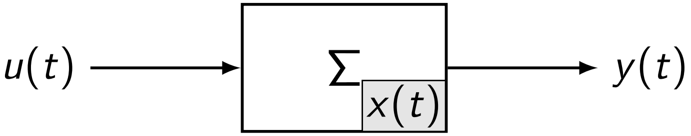
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = h(x(t), u(t), t)$$

$$\boxed{x(t_0) = x_0}$$

f = mappa di transizione di stato

h = mappa di uscita

Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

Tempo discreto:

$$x(\underline{t+1}) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = h(x(t), u(t), t)$$
$$x(t_0) = x_0$$

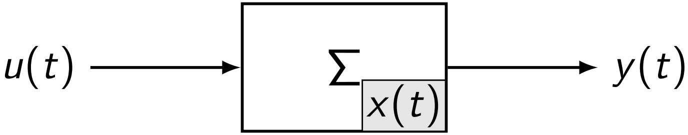
f = mappa di transizione di stato

h = mappa di uscita

In questa lezione

- Classificazione di sistemi
- Rappresentazione di sistemi
- Sistemi lineari in spazio di stato
- Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto

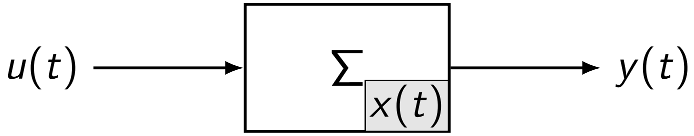
Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI) in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

note

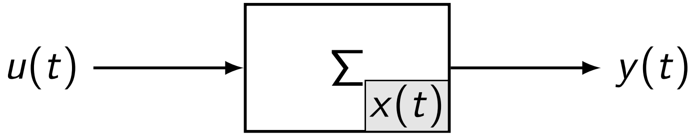
Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo continuo:
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad \boxed{x(t_0) = x_0}$$

Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\quad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo discreto:
$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

Sistemi LTI in spazio di stato

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma \;\; x(t)} \longrightarrow y(t)$$

Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Sovrapposizione degli effetti

$x',\ y'$ = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0' e ingresso u'

$x'',\ y''$ = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0'' e ingresso u''

$$\boxed{x_0 = \alpha_1 x_0' + \alpha_2 x_0'',\ u = \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \implies x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'',\ y = \alpha_1 y' + \alpha_2 y''}$$

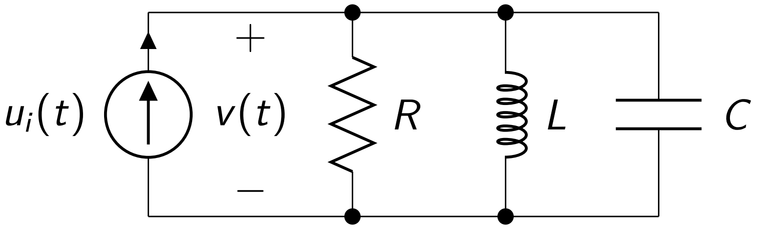
Perché lo spazio di stato?

- Si lavora direttamente nel dominio temporale evitando trasformate/antitrasformate
- Si gestiscono più facilmente sistemi MIMO (multi-input multi-output)
- Problemi di analisi e controllo diventano più facili da un punto di vista numerico
- La teoria dei controlli “moderna” si basa sullo spazio di stato

In questa lezione

- Classificazione di sistemi
- Rappresentazione di sistemi
- Sistemi lineari in spazio di stato
- Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto

Circuito RLC

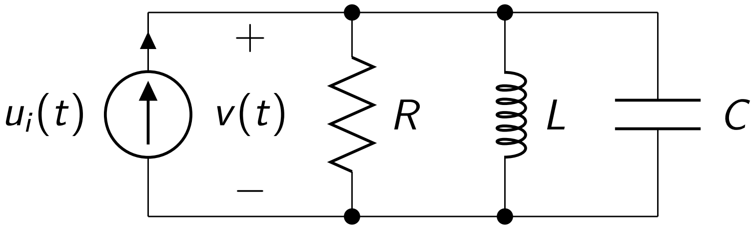


$$u_i(t) = \text{input}, \; v(t) = \text{output}$$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

note

Circuito RLC



$u_i(t) = \text{input},\ v(t) = \text{output}$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

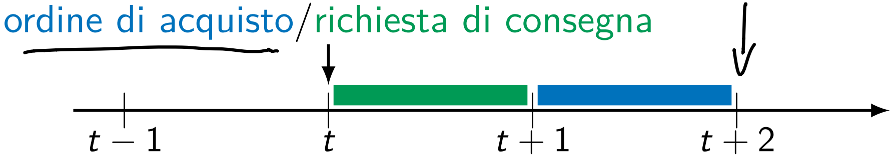
$$x_1 = v,\ x_2 = i_L,\ u = u_i,\ y = x_1 = v$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0$$

note

Magazzino merci



$$u_1(t),\ u_2(t) = \text{input},\ y(t) = \text{output}$$

$y(t) =$ quantità merce in magazzino al tempo t

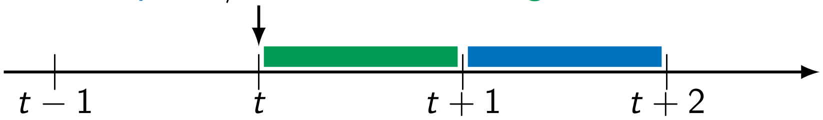
$u_1(t) =$ quantità merce ordinata (in entrata) al tempo t

$u_2(t) =$ quantità merce richiesta (in uscita) al tempo t

note

Magazzino merci

ordine di acquisto/richiesta di consegna



$u_1(t),\ u_2(t) = \text{input},\ y(t) = \text{output}$

$y(t) =$ quantità merce in magazzino al tempo t
$u_1(t) =$ quantità merce ordinata (in entrata) al tempo t
$u_2(t) =$ quantità merce richiesta (in uscita) al tempo t

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

F.d.T. $G_1(z) = \dfrac{z^{-1}}{z-1},\ \ G_2(z) = -\dfrac{1}{z-1}$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = u_1(t-1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Sistemi in spazio di stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI) in spazio di stato

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma \quad x(t)} \longrightarrow y(t)$$

Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

note

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_{11} x_1 + \dots + f_{1n} x_n + g_{11} u_1 + \dots + g_{1m} u_m \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_{n1} x_1 + \dots + f_{nn} x_n + g_{n1} u_1 + \dots + g_{nm} u_m \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

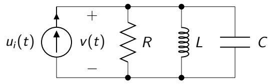
$\dot{x} = Fx + Gu \qquad F =$ matrice di stato, $\quad G =$ matrice di ingresso

$$\begin{cases} y_1 = h_{11} x_1 + \dots + h_{1n} x_n + j_{11} u_1 + \dots + j_{1m} u_m \\ \vdots \\ y_p = h_{p1} x_1 + \dots + h_{pn} x_n + j_{p1} u_1 + \dots + j_{pm} u_m \end{cases}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \\ h_{p1} & \cdots & h_{pn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n} \qquad J = \begin{bmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ j_{p1} & \cdots & j_{pm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$y = Hx + Ju \qquad H =$ matrice di uscita, $\quad J =$ matrice di feed-forward

Circuito RLC



$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

$u_i(t)$ = corrente erogata dal generatore = input

$v(t)$ = tensione ai capi di R, L, C = output

Leggi delle componenti R, L, C:

R) $v_R = R\, i_R$

L) $v_L = L \dfrac{di_L}{dt}$

C) $i_C = C \dfrac{dv_C}{dt}$

Leggi del circuito:

1) $v = v_R = v_L = v_C$

2) $u_i = i_R + i_L + i_C$

---

2) $$\frac{di_R}{dt} + \frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt} = \frac{du_i}{dt}$$

$$\frac{1}{R}\frac{dv_R}{dt} + \frac{v_L}{L} + C\frac{d^2 v_C}{dt^2} = \frac{du_i}{dt}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v - \frac{1}{C}\frac{du_i}{dt} = 0$$

dominio Laplace

$$s^2 V(s) + \frac{s}{RC} V(s) + \frac{1}{LC} V(s) = \frac{s}{C} U_i(s)$$

$$G(s) = \frac{V(s)}{U_i(s)} = \frac{s/C}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

Rappresentazione interna:

variabili di stato = $\begin{cases} \text{tensioni su } C \\ \text{correnti su } L \end{cases}$

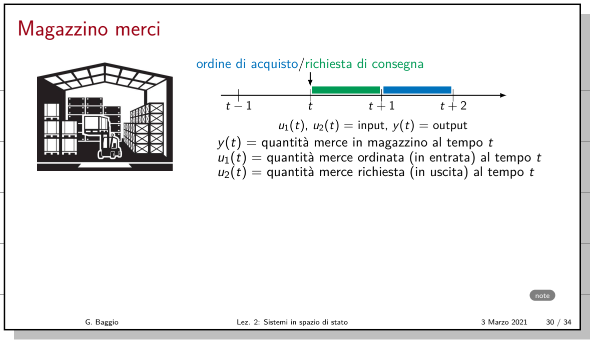
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad x_1(t) = V_C(t) \qquad x_2(t) = i_L(t)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C}(u_i - i_R - i_L)$$

$$= \frac{1}{C}\left(u_i - \frac{\overset{\parallel V_C}{V_R}}{R} - x_2\right) = \frac{1}{C}\left(u_i - \frac{x_1}{R} - x_2\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} V_L = \frac{1}{L} V_C = \frac{1}{L} x_1$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ 1/L & 0 \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}}^{G} u \\ y = V = x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x + \underbrace{0}_{J} \cdot u \end{cases}$$



$y(t)$ = quantità di merce al tempo t = output

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t) = \text{quantità di merce ordinata al tempo } t \\ u_2(t) = \text{quantità di merce richiesta al tempo } t \end{array}\right\} \text{input}$$

Rappresentazione esterna:

$$y(t+1) = y(t) + u_1(t-1) - u_2(t)$$

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

trasformate Zeta

$$\hookrightarrow \quad zY(z) - Y(z) = z^{-1}U_1(z) - U_2(z)$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{Y(z)}{U_1(z)} & \frac{Y(z)}{U_2(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^{-1}}{z-1} & \frac{-1}{z-1} \end{bmatrix} \qquad (\text{F.d.T.})$$

Rappresentazione interna:

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = u_1(t-1) \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t+1) = y(t+1) = y(t) + u_1(t-1) - u_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - u_2(t)$$

$$x_2(t+1) = u_1(t)$$

$$\begin{cases} x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{F} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{G} u(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x(t) + \underbrace{0}_{J} \cdot u(t) \end{cases}$$