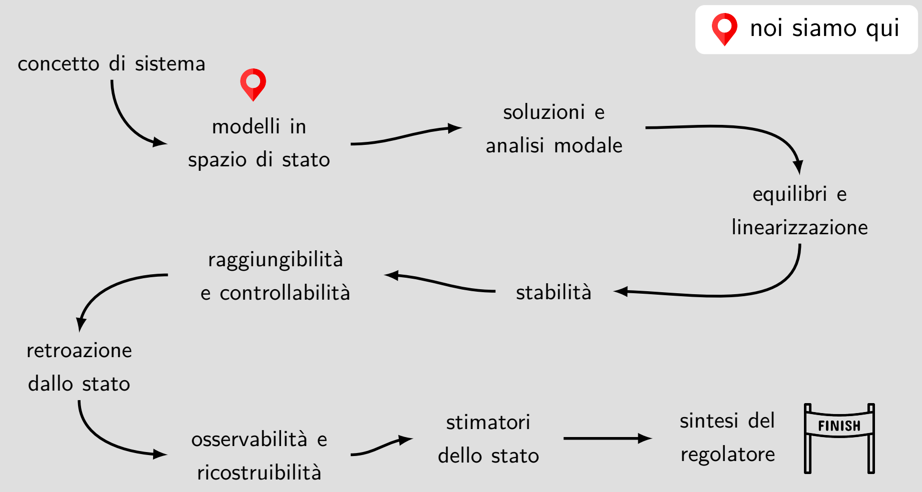
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Sistemi in spazio di stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

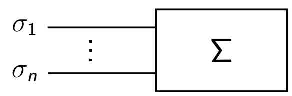


In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.

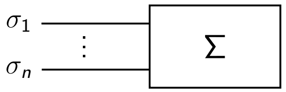


$\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

Esempio: Σ = appartamento, σ_1 = temp. cucina, σ_2 = temp. soggiorno, ...

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.

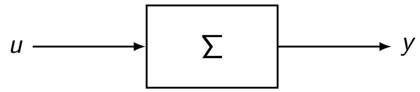


$\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$ variabili descrittive d'interesse

$\boxed{\Sigma = \text{Modello matematico che descrive l'evoluzione di } \sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n}$

Sistema

Definizione: Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.



In molti casi in $\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$ si possono distinguere variabili di:

ingresso/input u (causa) uscita/output y (effetto)

Esempio: automobile: u = pedale acc. / sterzo, y = posizione / velocità veicolo
motore elettrico: u = tensione / corrente armatura, y = posizione / velocità rotore

Perché studiare Σ e le sue proprietà?

Capire il funzionamento di Σ per poi (eventualmente) **controllarlo**!

N.B. La Matematica è il linguaggio naturale per studiare Σ da un punto di vista quantitativo/ingegneristico.

Classificazione dei sistemi

Σ

- **Deterministico:** comportamento di Σ descritto da leggi deterministiche
- **Stocastico:** comportamento di Σ descritto da leggi probabilistiche

Classificazione dei sistemi

Σ

- **Dinamico:** valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende dall'evoluzione delle stesse in determinati intervalli
- **Statico:** valore assunto dalle variabili $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ad un certo istante temporale t dipende solo dal valore assunto dalle stesse in t

Classificazione dei sistemi

Σ
dinamico

- **Causale:** valore assunto da alcune variabili d'interesse (y) al tempo t dipende dal valore delle stesse e/o di altri variabili (u) in tempi $\leq t$
- **Non causale:** $y(t)$ può dipendere da $y(s)$, $u(s)$, per $s > t$

Classificazione dei sistemi

Σ

- **Tempo invariante:** legge che lega variabili di interesse indipendente da t
- **Tempo variante:** legge che lega variabili di interesse dipendente da t

Classificazione dei sistemi

Σ

- **Lineare:** legge che lega variabili di interesse di tipo lineare
- **Non lineare:** legge che lega variabili di interesse non di tipo lineare

Classificazione dei sistemi

Σ

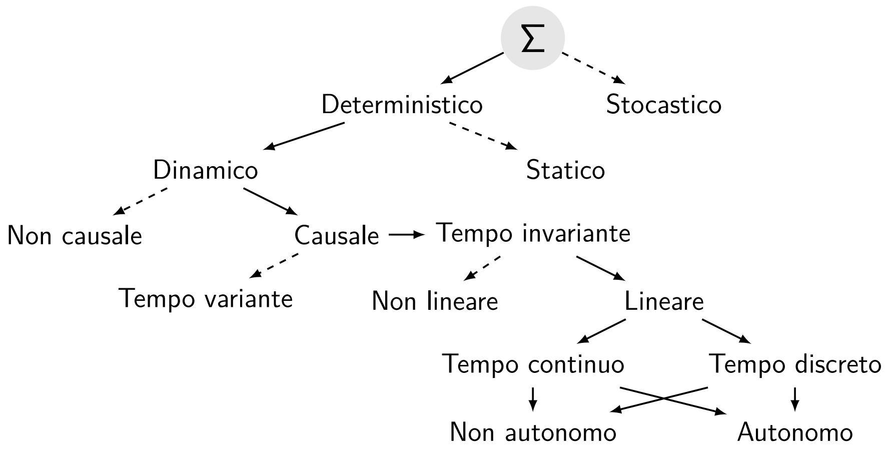
- **Tempo continuo:** variabile temporale $t \in \mathbb{R}$
- **Tempo discreto:** variabile temporale $t \in \mathbb{Z}$

Classificazione dei sistemi

Σ

- **Autonomo:** non ci sono ingressi $(u = 0)$
- **Non autonomo:** ci sono ingressi $(u \neq 0)$

Classificazione dei sistemi



Rappresentazione esterna o I/O

$$u(t) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow y(t)$$

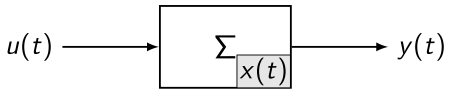
Tempo continuo: $h\left(y^{(n)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, \dot{u}(t), u(t), t\right) = 0$ + c.i.

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Laplace) $G(s) = Y(s)/U(s)$

Tempo discreto: $h\,(y(t-t_n), \ldots, y(t-1), y(t), u(t-t_m), \ldots, u(t-1), u(t), t) = 0$ + c.i.

Σ lineare tempo invariante: F.d.T. (Zeta) $G(z) = Y(z)/U(z)$

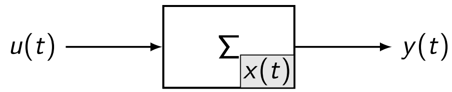
Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

Proprietà di separazione: $x(t)$ fornisce tutta l'informazione sulla storia passata di Σ necessaria per valutare $x(t)$ e $y(t)$ ad istanti futuri (una volta noto $u(t)$).

Rappresentazione interna o di stato

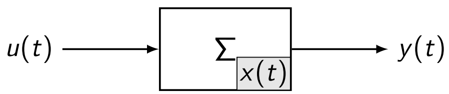


$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

Tempo continuo:
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

f = mappa di transizione di stato $\qquad$ h = mappa di uscita

Rappresentazione interna o di stato

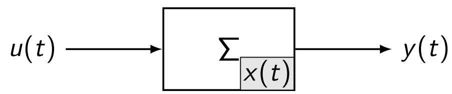


$x(t)$ = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

Tempo discreto:
$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

f = mappa di transizione di stato $\qquad$ h = mappa di uscita

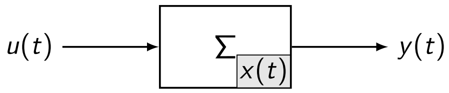
Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad$ $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo continuo:
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

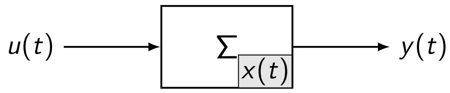
Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo discreto:
$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0$$

Sistemi LTI in spazio di stato



Σ lineare e tempo invariante $\qquad x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p$

Sovrapposizione degli effetti

x', y' = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0' e ingresso u'

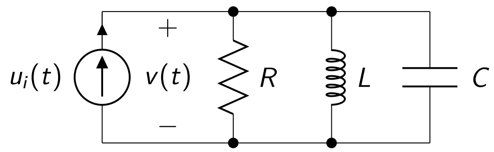
x'', y'' = stato, uscita di Σ con stato iniziale x_0'' e ingresso u''

$$\boxed{x_0 = \alpha_1 x_0' + \alpha_2 x_0'',\ u = \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \implies x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'',\ y = \alpha_1 y' + \alpha_2 y''}$$

Perché lo spazio di stato?

- Si lavora direttamente nel dominio temporale evitando trasformate/antitrasformate
- Si gestiscono più facilmente sistemi MIMO (multi-input multi-output)
- Problemi di analisi e controllo diventano più facili da un punto di vista numerico
- La teoria dei controlli "moderna" si basa sullo spazio di stato

Circuito RLC



$u_i(t)$ = input, $v(t)$ = output

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

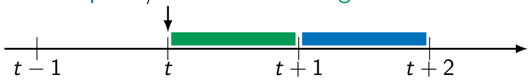
$$x_1 = v,\ x_2 = i_L,\ u = u_i,\ y = x_1 = v$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0$$

Magazzino merci

ordine di acquisto/richiesta di consegna



$u_1(t)$, $u_2(t)$ = input, $y(t)$ = output

$y(t)$ = quantità merce in magazzino al tempo t
$u_1(t)$ = quantità merce ordinata (in entrata) al tempo t
$u_2(t)$ = quantità merce richiesta (in uscita) al tempo t

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

F.d.T. $G_1(z) = \dfrac{z^{-1}}{z-1}$, $G_2(z) = -\dfrac{1}{z-1}$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = u_1(t-1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$