

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)  
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 2: Sistemi in spazio di stato

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



noi siamo qui

concetto di sistema



modelli in  
spazio di stato

soluzioni e  
analisi modale

equilibri e  
linearizzazione

raggiungibilità  
e controllabilità

stabilità

retroazione  
dallo stato

osservabilità e  
ricostruibilità

stimatori  
dello stato

sintesi del  
regolatore

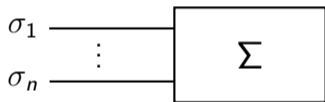


## In questa lezione

- ▷ Classificazione di sistemi
- ▷ Rappresentazione di sistemi
- ▷ Sistemi lineari in spazio di stato
- ▷ Esempi di sistemi a tempo continuo e discreto

# Sistema

**Definizione:** Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.

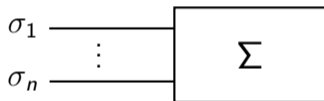


$\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$  variabili descrittive d'interesse

**Esempio:**  $\Sigma$  = appartamento,  $\sigma_1$  = temp. cucina,  $\sigma_2$  = temp. soggiorno, ...

# Sistema

**Definizione:** Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.

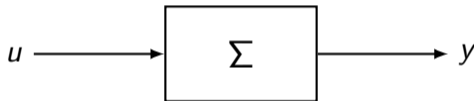


$\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$  variabili descrittive d'interesse

$\Sigma =$  Modello matematico che descrive l'evoluzione di  $\sigma_1, \sigma_2 \dots, \sigma_n$

# Sistema

**Definizione:** Un qualsiasi oggetto fisico o artificiale il cui comportamento (evoluzione nel tempo) è descritto da un insieme di variabili tipicamente interagenti tra di loro.



In molti casi in  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  si possono distinguere variabili di:

ingresso/input  $u$  (causa)

uscita/output  $y$  (effetto)

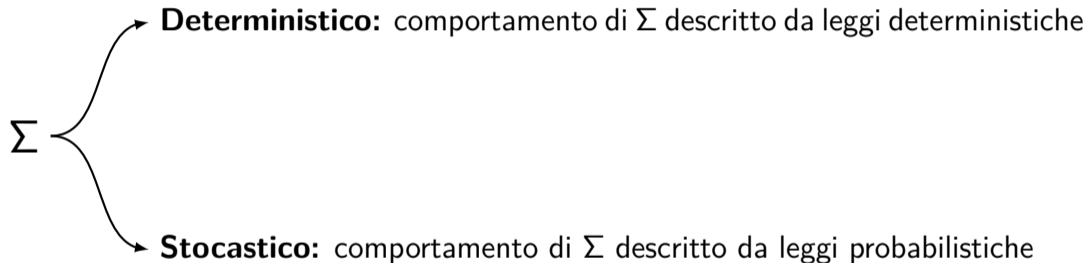
**Esempio:** automobile:  $u =$  pedale acc. / sterzo,  $y =$  posizione / velocità veicolo  
motore elettrico:  $u =$  tensione / corrente armatura,  $y =$  posizione / velocità rotore

Perché studiare  $\Sigma$  e le sue proprietà?

**Capire** il funzionamento di  $\Sigma$  per poi (eventualmente) **controllarlo!**

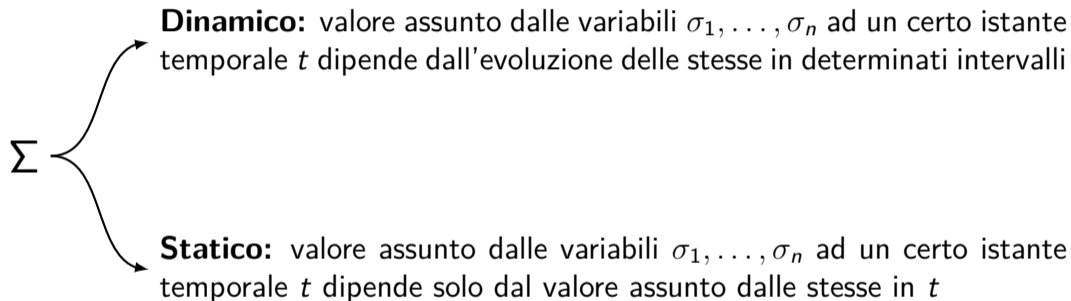
**N.B.** La Matematica è il linguaggio naturale per studiare  $\Sigma$  da un punto di vista quantitativo/ingegneristico.

# Classificazione dei sistemi

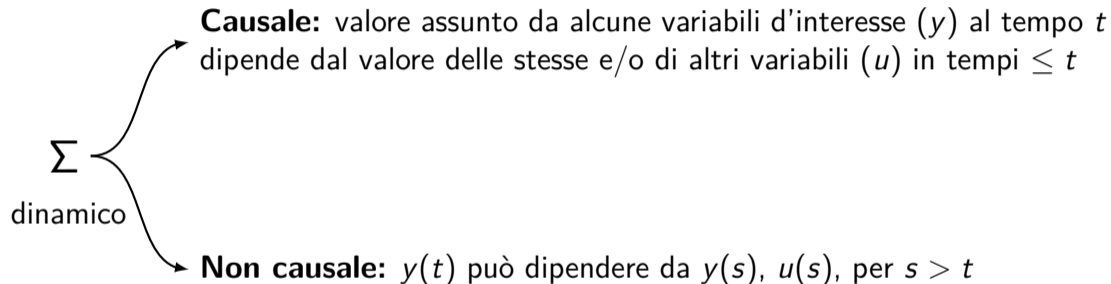




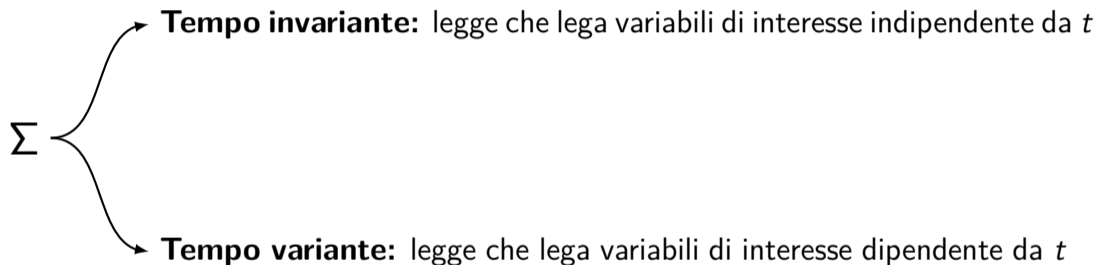
# Classificazione dei sistemi



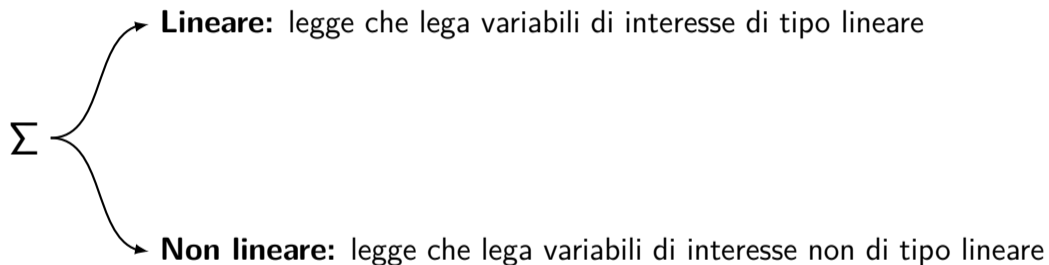
# Classificazione dei sistemi



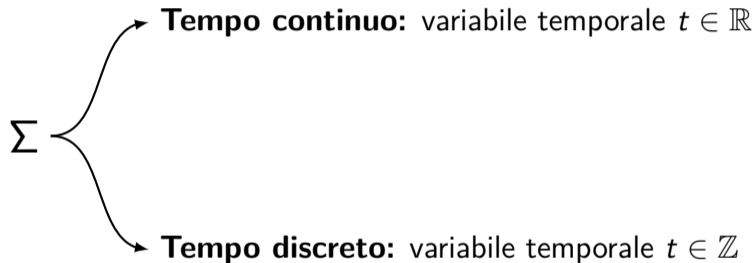
# Classificazione dei sistemi



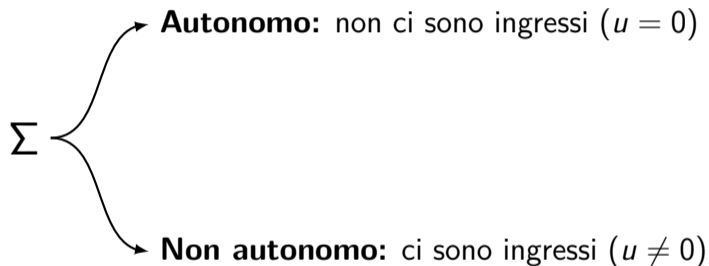
# Classificazione dei sistemi



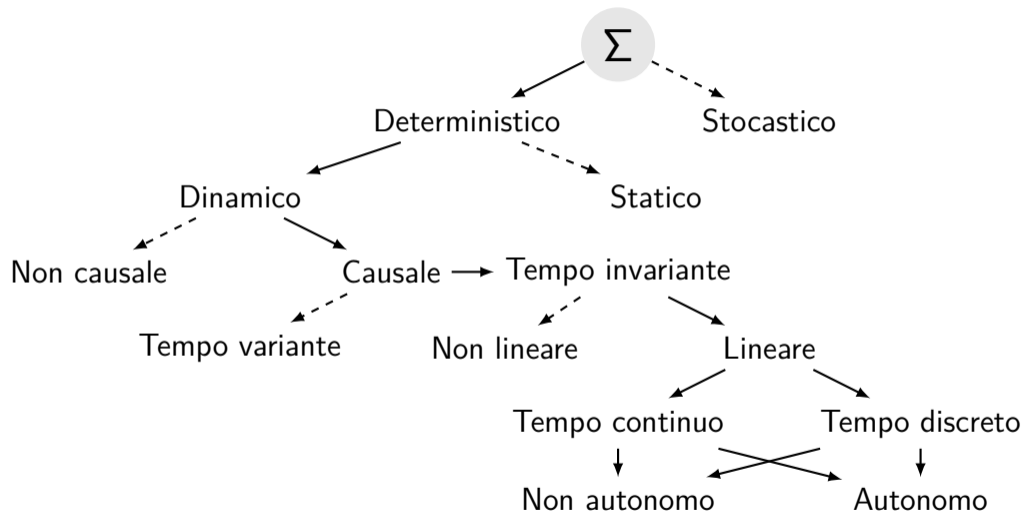
# Classificazione dei sistemi



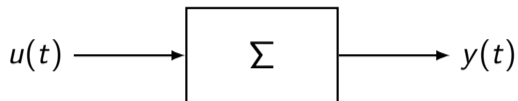
# Classificazione dei sistemi



# Classificazione dei sistemi



# Rappresentazione esterna o I/O



Tempo continuo:  $h(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t), t) = 0 + \text{c.i.}$

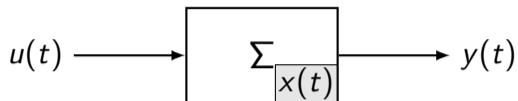
$\Sigma$  lineare tempo invariante: F.d.T. (Laplace)  $G(s) = Y(s)/U(s)$

Tempo discreto:  $h(y(t-t_n), \dots, y(t-1), y(t), u(t-t_m), \dots, u(t-1), u(t), t) = 0 + \text{c.i.}$

$\Sigma$  lineare tempo invariante: F.d.T. (Zeta)  $G(z) = Y(z)/U(z)$



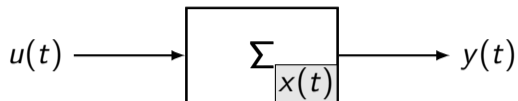
# Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$  = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

**Proprietà di separazione:**  $x(t)$  fornisce tutta l'informazione sulla storia passata di  $\Sigma$  necessaria per valutare  $x(t)$  e  $y(t)$  ad istanti futuri (una volta noto  $u(t)$ ).

# Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$  = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

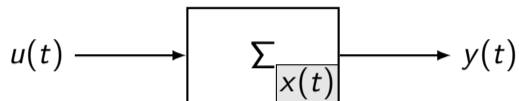
Tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = h(x(t), u(t), t)$$

$f$  = mappa di transizione di stato

$h$  = mappa di uscita

# Rappresentazione interna o di stato



$x(t)$  = (vettore di) variabili di stato (memoria interna!)

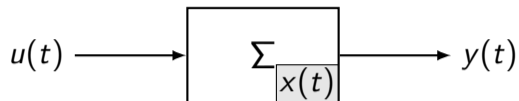
Tempo discreto:

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), t) \quad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = h(x(t), u(t), t)$$

$f$  = mappa di transizione di stato

$h$  = mappa di uscita

# Sistemi LTI in spazio di stato

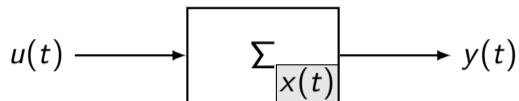


$\Sigma$  lineare e tempo invariante       $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \quad x(t_0) = x_0$$

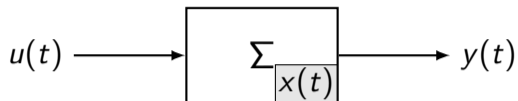
# Sistemi LTI in spazio di stato



$\Sigma$  lineare e tempo invariante       $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$

Tempo discreto:       $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$        $x(t_0) = x_0$   
 $y(t) = Hx(t) + Ju(t)$

# Sistemi LTI in spazio di stato



$\Sigma$  lineare e tempo invariante       $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$

## Sovrapposizione degli effetti

$x'$ ,  $y'$  = stato, uscita di  $\Sigma$  con stato iniziale  $x'_0$  e ingresso  $u'$

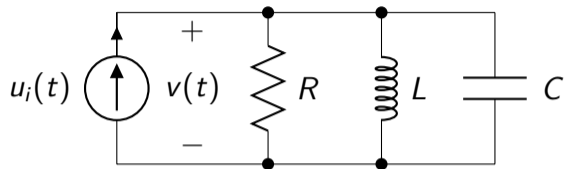
$x''$ ,  $y''$  = stato, uscita di  $\Sigma$  con stato iniziale  $x''_0$  e ingresso  $u''$

$$x_0 = \alpha_1 x'_0 + \alpha_2 x''_0, u = \alpha_1 u' + \alpha_2 u'' \implies x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'', y = \alpha_1 y' + \alpha_2 y''$$

# Perché lo spazio di stato?

- Si lavora direttamente nel dominio temporale evitando trasformate/antitrasformate
- Si gestiscono più facilmente sistemi MIMO (multi-input multi-output)
- Problemi di analisi e controllo diventano più facili da un punto di vista numerico
- La teoria dei controlli “moderna” si basa sullo spazio di stato

# Circuito RLC



$$u_i(t) = \text{input}, v(t) = \text{output}$$

Rappresentazione (esterna ed) interna?

Rappresentazione esterna

$$\ddot{v} + \frac{1}{RC}\dot{v} + \frac{1}{LC}v - \frac{1}{C}\dot{u}_i = 0$$

$$\text{F.d.T. } G(s) = \frac{s/C}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1 = v, x_2 = i_L, u = u_i, y = x_1 = v$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

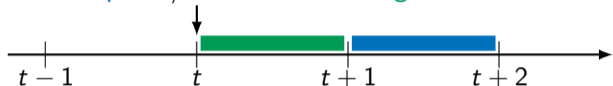
$$H = [1 \quad 0], J = 0$$



# Magazzino merci



ordine di acquisto/richiesta di consegna



$u_1(t), u_2(t) = \text{input}, y(t) = \text{output}$

$y(t) = \text{quantità merce in magazzino al tempo } t$

$u_1(t) = \text{quantità merce ordinata (in entrata) al tempo } t$

$u_2(t) = \text{quantità merce richiesta (in uscita) al tempo } t$

Rappresentazione esterna

$$y(t+1) - y(t) - u_1(t-1) + u_2(t) = 0$$

$$\text{F.d.T. } G_1(z) = \frac{z^{-1}}{z-1}, \quad G_2(z) = -\frac{1}{z-1}$$

Rappresentazione interna (di stato)

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = u_1(t-1)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$