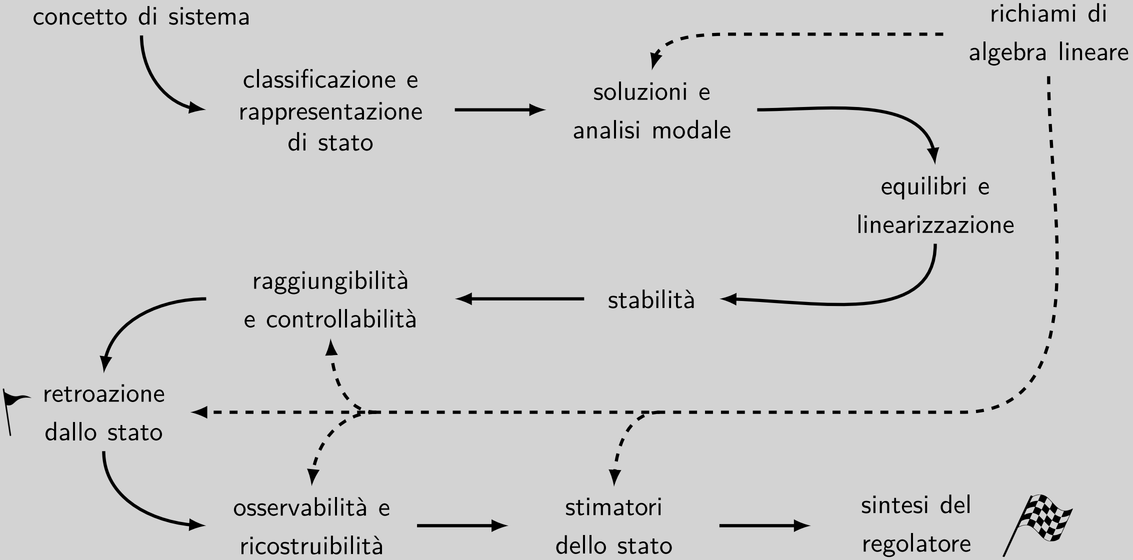
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 24: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



concetto di sistema

classificazione e rappresentazione di stato

soluzioni e analisi modale

richiami di algebra lineare

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

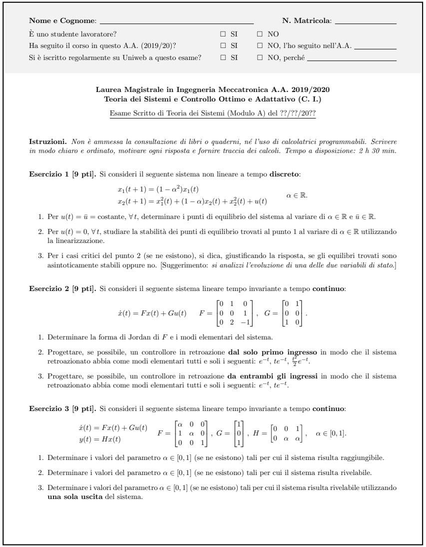
In questa lezione

- Simulazione d'esame
    - Esercizio trasformate Zeta
        - Esercizio stabilità tramite Lyapunov
            - Q & A

In questa lezione

- Simulazione d’esame
- Esercizio trasformate Zeta
- Esercizio stabilità tramite Lyapunov
- Q & A

Informazioni sull'esame



Nome e Cognome: ______________________________ **N. Matricola**: ____________

È uno studente lavoratore? ☐ SI ☐ NO

Ha seguito il corso in questo A.A. (2019/20)? ☐ SI ☐ NO, l'ho seguito nell'A.A. ________

Si è iscritto regolarmente su Uniweb a questo esame? ☐ SI ☐ NO, perché ______________

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2019/2020
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del ??/??/20??

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Tempo a disposizione: 2 h 30 min.*

Esercizio 1 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\alpha^2)x_1(t) \\ x_2(t+1) &= x_1^2(t) + (1-\alpha)x_2(t) + x_2^2(t) + u(t) \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per $u(t) = \bar{u} =$ costante, $\forall\, t$, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. Per $u(t) = 0$, $\forall\, t$, studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati al punto 1 al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.
3. Per i casi critici del punto 2 (se ne esistono), si dica, giustificando la risposta, se gli equilibri trovati sono asintoticamente stabili oppure no. [Suggerimento: *si analizzi l'evoluzione di una delle due variabili di stato.*]

Esercizio 2 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

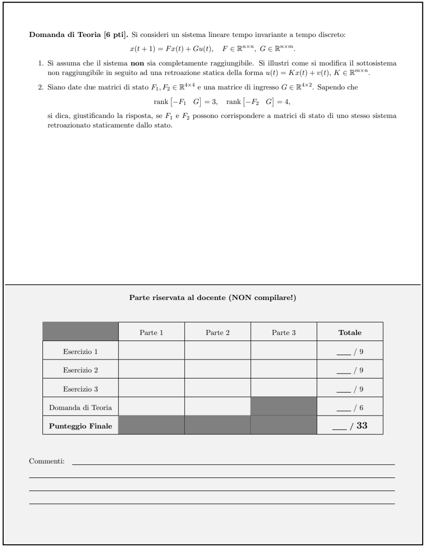
$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F e i modi elementari del sistema.
2. Progettare, se possibile, un controllore in retroazione **dal solo primo ingresso** in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i seguenti: e^{-t}, te^{-t}, $\frac{t^2}{2}e^{-t}$.
3. Progettare, se possibile, un controllore in retroazione **da entrambi gli ingressi** in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i seguenti: e^{-t}, te^{-t}.

Esercizio 3 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0,1].$$

1. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta raggiungibile.
2. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta rivelabile.
3. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta rivelabile utilizzando **una sola uscita** del sistema.



Domanda di Teoria [6 pti]. Si consideri un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n},\ G \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

1. Si assuma che il sistema **non** sia completamente raggiungibile. Si illustri come si modifica il sottosistema non raggiungibile in seguito ad una retroazione statica della forma $u(t) = Kx(t) + v(t)$, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
2. Siano date due matrici di stato $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e una matrice di ingresso $G \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Sapendo che

   $$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -F_1 & G \end{bmatrix} = 3, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -F_2 & G \end{bmatrix} = 4,$$

   si dica, giustificando la risposta, se F_1 e F_2 possono corrispondere a matrici di stato di uno stesso sistema retroazionato staticamente dallo stato.

Parte riservata al docente (NON compilare!)

	Parte 1	Parte 2	Parte 3	**Totale**
Esercizio 1				___ / 9
Esercizio 2				___ / 9
Esercizio 3				___ / 9
Domanda di Teoria				___ / 6
Punteggio Finale				___ / **33**

Commenti: ______________________________________

Simulazione d'esame: Esercizio 1

extra

Esercizio 1 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\alpha^2)x_1(t) \\ x_2(t+1) &= x_1^2(t) + (1-\alpha)x_2(t) + x_2^2(t) + u(t) \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per $u(t) = \bar{u} = \text{costante}, \forall\, t$, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. Per $u(t) = 0, \forall\, t$, studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati al punto 1 al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.
3. Per i casi critici del punto 2 (se ne esistono), si dica, giustificando la risposta, se gli equilibri trovati sono asintoticamente stabili oppure no. [Suggerimento: *si analizzi l'evoluzione di una delle due variabili di stato.*]

Simulazione d'esame: soluzione Esercizio 1

1. $\alpha = 0$: $\begin{cases} \text{infiniti eq. } \begin{bmatrix} \beta & \pm\sqrt{-\beta^2 - \bar{u}} \end{bmatrix}^\top, \beta \in \mathbb{R}, \beta^2 + \bar{u} \leq 0 & \bar{u} < 0 \\ \text{1 eq. } \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top & \bar{u} = 0 \\ \text{nessun eq.} & \bar{u} > 0 \end{cases}$

   $\alpha \neq 0$: $\begin{cases} \text{2 eq. } \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}^\top & \alpha^2 - 4\bar{u} > 0 \\ \text{1 eq. } \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top & \alpha^2 - 4\bar{u} = 0 \\ \text{nessun eq.} & \alpha^2 - 4\bar{u} < 0 \end{cases}$

2. $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ asint. stabile se $0 < \alpha < \sqrt{2}$, instabile se $\alpha < 0$, $\alpha > \sqrt{2}$

   $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \end{bmatrix}^\top$ asint. stabile se $-\sqrt{2} < \alpha < 0$, instabile se $\alpha < -\sqrt{2}$, $\alpha > 0$

3. Gli equilibri non sono asintoticamente stabili

Simulazione d'esame: Esercizio 2

extra

Esercizio 2 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F e i modi elementari del sistema.
2. Progettare, se possibile, un controllore in retroazione **dal solo primo ingresso** in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i seguenti: e^{-t}, te^{-t}, $\frac{t^2}{2}e^{-t}$.
3. Progettare, se possibile, un controllore in retroazione **da entrambi gli ingressi** in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i seguenti: e^{-t}, te^{-t}.

Simulazione d'esame: soluzione Esercizio 2

1. $F_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Modi elementari: 1, e^t, e^{-2t}

2. $K = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

3. $K = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Simulazione d'esame: Esercizio 3

extra

Esercizio 3 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

1. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0, 1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta raggiungibile.
2. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0, 1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta rivelabile.
3. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0, 1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta rivelabile utilizzando **una sola uscita** del sistema.

Simulazione d'esame: soluzione Esercizio 3

1. Sistema raggiungibile se $\alpha \in [0, 1)$
2. Sistema rivelabile se $\alpha \in (0, 1]$
3. Sistema rivelabile da una uscita se $\alpha \in (0, 1)$

Simulazione d'esame: Domanda di teoria

extra

Domanda di Teoria [6 pti]. Si consideri un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n},\ G \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

1. Si assuma che il sistema **non** sia completamente raggiungibile. Si illustri come si modifica il sottosistema non raggiungibile in seguito ad una retroazione statica della forma $u(t) = Kx(t) + v(t)$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
2. Siano date due matrici di stato $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ e una matrice di ingresso $G \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$. Sapendo che

   $$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -F_1 & G \end{bmatrix} = 3, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -F_2 & G \end{bmatrix} = 4,$$

   si dica, giustificando la risposta, se F_1 e F_2 possono corrispondere a matrici di stato di uno stesso sistema retroazionato staticamente dallo stato.

In questa lezione

- ▷ Simulazione d'esame
  - ▷ Esercizio trasformate Zeta
    - ▷ Esercizio stabilità tramite Lyapunov
      - ▷ Q & A

Esercizio trasformate Zeta [Es. 3 Lezione 7]

extra

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Si determini l'evoluzione complessiva del sistema (libera + forzata) in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 0.8^t, t \geq 0$, e condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio trasformate Zeta [Es. 3 Lezione 7]

extra

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Si determini l'evoluzione complessiva del sistema (libera + forzata) in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 0.8^t, t \geq 0$, e condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soluzione: $y(t) = \frac{1}{3}2^{-t+1} + \frac{10}{3}(0.8)^t,\ t \geq 0.$

In questa lezione

- Simulazione d'esame
- Esercizio trasformate Zeta
- Esercizio stabilità tramite Lyapunov
- Q & A

Esercizio stabilità tramite Lyapunov [Es. 2 Lezione 11]

extra

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_2^2(t) - \alpha^2)x_1^2(t)x_2(t) + (\alpha^2 - x_1^2(t))x_2(t) \\ x_2(t+1) = (x_1^2(t) - \alpha^2)x_2^2(t)x_1(t) + (\alpha^2 - x_2^2(t))x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando la linearizzazione e, negli eventuali casi critici, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio stabilità tramite Lyapunov [Es. 2 Lezione 11]

extra

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_2^2(t) - \alpha^2)x_1^2(t)x_2(t) + (\alpha^2 - x_1^2(t))x_2(t) \\ x_2(t+1) = (x_1^2(t) - \alpha^2)x_2^2(t)x_1(t) + (\alpha^2 - x_2^2(t))x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando la linearizzazione e, negli eventuali casi critici, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Soluzione: $\bar{x}$ asint. stabile se $|\alpha| < 1$, instabile se $|\alpha| > 1$, sempl. stabile se $\alpha = \pm 1$

In questa lezione

- Simulazione d'esame
  - Esercizio trasformate Zeta
    - Esercizio stabilità tramite Lyapunov
      - Q & A

?

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

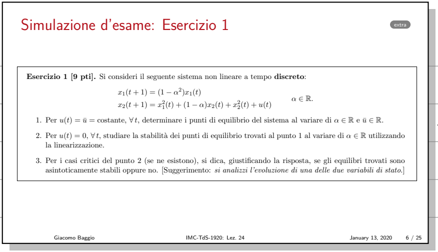
Lez. 24: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it
baggiogi.github.io

back



Simulazione d'esame: Esercizio 1

extra

Esercizio 1 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\alpha^2)x_1(t) \\ x_2(t+1) &= x_1^2(t) + (1-\alpha)x_2(t) + x_2^2(t) + u(t) \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per $u(t) = \bar{u} =$ costante, $\forall\, t$, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. Per $u(t) = 0$, $\forall\, t$, studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati al punto 1 al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.
3. Per i casi critici del punto 2 (se ne esistono), si dica, giustificando la risposta, se gli equilibri trovati sono asintoticamente stabili oppure no. [Suggerimento: *si analizzi l'evoluzione di una delle due variabili di stato.*]

Giacomo Baggio IMC-TdS-1920: Lez. 24 January 13, 2020 6 / 25

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (1-\alpha^2)\, x_1(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) + (1-\alpha)\, x_2(t) + x_2^2(t) + u(t) \end{cases}$$

① $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$ è eq. $\iff \begin{cases} \bar{x}_1 = (1-\alpha^2)\, \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1^2 + (1-\alpha)\, \bar{x}_2 + \bar{x}_2^2 + \bar{u} \end{cases}$

$$\begin{cases} \alpha^2 \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_1^2 - \alpha \bar{x}_2 + \bar{x}_2^2 + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

back

$$\boxed{\alpha = 0} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{u} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = \beta \in \mathbb{R} \\ \beta^2 + \bar{x}_2^2 + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{x}_2^2 = -(\beta^2 + \bar{u})$$

$\bar{u} < 0$: $\bar{x}_2 = \pm\sqrt{-(\beta^2 + \bar{u})}$ $\qquad \beta^2 + \bar{u} < 0$

inf. eq. $\begin{bmatrix} \beta \\ \pm\sqrt{-(\beta^2 + \bar{u})} \end{bmatrix}$ $\qquad \beta^2 + \bar{u} < 0$

$\bar{u} = 0$: $\bar{x}_2^2 = -\beta^2 \Rightarrow \bar{x}_2 = \beta = 0$

1 eq. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

back

$\bar{u} > 0$: $\bar{x}_2^2 = -(\beta^2 + \bar{u}) < 0$

Nessun eq.

$\boxed{\alpha \neq 0}$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2^2 - \alpha \bar{x}_2 + \bar{u} = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\bar{x}_2^{(1,2)} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\bar{u}}}{2}$$

$\alpha^2 - 4\bar{u} > 0$: 2 eq. $\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}$

$\alpha^2 - 4\bar{u} = 0$: 1 eq. $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha/2 \end{bmatrix}$

$\alpha^2 - 4\bar{u} < 0$: Nessun eq.

② $u(t) = \bar{u} = 0$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & 0 \\ 2x_1 & 1-\alpha+2x_2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\alpha = 0}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

back

$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ caso critico

$\boxed{\alpha \neq 0}$ $\alpha^2 - 4\bar{u} = \alpha^2 > 0$ 2 eq. $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$

$J(\bar{x}_1) = \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$ $\begin{cases} |1-\alpha^2| < 1 \\ |1-\alpha| < 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2} \\ 0 < \alpha < 2 \end{cases}$

$\bar{x}_1$ è asint stabile se $0 < \alpha < \sqrt{2}$

$\bar{x}_1$ è instabile se $\alpha < 0$, $\alpha > \sqrt{2}$

back

Caso critico : $\alpha = \sqrt{2}$

$$J(\bar{x}_2) = \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 1-\alpha+2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 1+\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} |1-\alpha^2| < 1 \\ |1+\alpha| < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2} \\ -2 < \alpha < 0 \end{cases}$$

$\bar{x}_2$ è asint. stabile se $-\sqrt{2} < \alpha < 0$

$\bar{x}_2$ instabile se $\alpha < -\sqrt{2}, \ \alpha > 0$

back

Caso critico: $\alpha = -\sqrt{2}$

③ • $\alpha = 0$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) \\ \quad \text{"} \end{cases}$

$x_1(0) = \varepsilon \neq 0 \Rightarrow x_1(t) = \varepsilon \quad \forall t$ eq. NON è asint. stabile

• $\alpha = \sqrt{2}$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} x_1(t+1) = -x_1(t) \\ \text{"} \end{cases}$

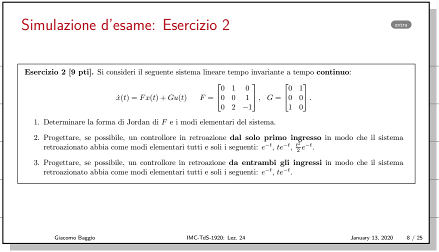
$x_1(0) = \varepsilon \neq 0 \Rightarrow x_1(1) = -\varepsilon, \; x_1(2) = \varepsilon, \; x_1(3) = -\varepsilon$ eq. NON è asint. stabile

back

- $\alpha = -\sqrt{2}$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_1(t) \\ \quad\quad '' \end{cases}$$

eq. NON è
asint. stabile



Simulazione d'esame: Esercizio 2

extra

Esercizio 2 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F e i modi elementari del sistema.
2. Progettare, se possibile, un controllore in retroazione **dal solo primo ingresso** in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i seguenti: e^{-t}, te^{-t}, $\frac{t^2}{2}e^{-t}$.
3. Progettare, se possibile, un controllore in retroazione **da entrambi gli ingressi** in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i seguenti: e^{-t}, te^{-t}.

back

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Autovalori F

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \left[\begin{array}{c|cc} \lambda & -1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -2 & \lambda+1 \end{array}\right]$$

$$= \lambda(\lambda(\lambda+1) - 2)$$

back

$$= \lambda\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right)$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ \\ -2 \end{array} \right.$$

$\lambda_1 = 0 \qquad \nu_1 = g_1 = 1$

$\lambda_2 = 1 \qquad \nu_2 = g_2 = 1$

$\lambda_3 = -2 \qquad \nu_3 = g_3 = 1$

$$F_J = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

Modi elementari: $e^{0t} = 1$

e^{t}

e^{-2t}

back

② $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$F + G_1 K$: autovalori: $\lambda_1 = -1$ $\qquad \nu_1 = 3$

$g_1 = 1$

(F, G_1) è in forma canonica di controllo

N.B.

$\Rightarrow (F, G_1)$ è raggiungibile (sistemi ragg. da 1 ingresso hanno un solo miniblocco per ogni autovalore!)

$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$

$$F + G_1 K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & 2+k_2 & -1+k_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F+G_1K}(\lambda) = \lambda^3 + (1-k_3)\lambda^2 + (-2-k_2)\lambda - k_1$$

$$\overset{!}{=} (\lambda+1)^3 = \lambda + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

$$\begin{cases} 1-k_3 = 3 \\ -2-k_2 = 3 \\ -k_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_3 = -2 \\ k_2 = -5 \\ k_1 = -1 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

③ $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$F+GK$: $\lambda_1 = -1$, $g_1 = 2$ (2 miniblocchi di Jordan relativi a -1)

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$$

$$k_{22} = -1$$

$$k_{23} = 0$$

$$k_{11} = 0$$

$$\downarrow$$

$$F + GK = \left[\begin{array}{c|cc} k_{21} & \overset{\to 0}{\boxed{1 + k_{22}}} & \overset{\to 0}{\boxed{k_{23}}} \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \underset{\to 0}{\boxed{k_{11}}} & 2 + k_{12} & -1 + k_{13} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \overset{\to -1}{\boxed{k_{21}}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{2 + k_{12} \qquad -1 + k_{13}}} \end{array}\right]$$

$$\tilde{F}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{12} & k_{13} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 + k_{12} & -1 + k_{13} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{\tilde{F}_{22}}(\lambda) = \lambda^2 + (1 - k_{13})\lambda + (-2 - k_{12}) \overset{!}{=} (\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$\begin{cases} 1 - K_{13} = 2 \\ -2 - k_{12} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_{13} = -1 \\ k_{12} = -3 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

METODO ALTERNATIVO (SKETCH):

$F + GK$: $\lambda_1 = -1$ $\nu_1 = 3,$ $g_1 = 2$

$\Delta_{F+GK}(\lambda) = (\lambda+1)^3$ (1ª condizione)

$$g_1 = 3 - \underbrace{\text{rank}\,(\lambda_1 I - F - GK)}_{1} = 2 \Rightarrow \text{rank}(-I - F - GK) = 1$$

(2ª condizione)

back

Dalla 2ª condizione:

$$=$$

$$\text{Rank}\begin{bmatrix} -1-K_{21} & -1-K_{22} & -K_{23} \\ 0 & -1 & -1 \\ -K_{11} & -2-K_{12} & -1+1-K_{13} \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1-K_{12} = 0 \\ -K_{11} = 0 \\ -1-K_{22} = -K_{23} = 0 \\ -1+1-K_{13} = 0 \end{cases}$$

(sistema di eq. II)

$$=$$

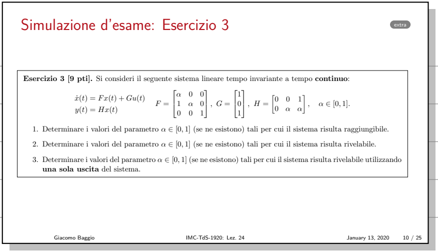
$$= 0$$

Dalla 1ª condizione:

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = (\lambda+1)^3 \Rightarrow \dots$$

(sistema di eq. I)

Risolvere sistema di eq. I e II



Simulazione d'esame: Esercizio 3

extra

Esercizio 3 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t)\\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \alpha & \alpha\end{bmatrix},\quad \alpha \in [0,1].$$

1. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta raggiungibile.
2. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta rivelabile.
3. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta rivelabile utilizzando **una sola uscita** del sistema.

Giacomo Baggio IMC-TdS-1920: Lez. 24 January 13, 2020 10 / 25

back

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = F\,x(t) + G\,u(t)\\ y(t) = H\,x(t)\end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 1 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \alpha & \alpha\end{bmatrix} \qquad \alpha \in [0,1]$$

① autovalori F: $\alpha = 1$: $\lambda_1 = 1$ $(\nu_1 = 3)$

$\alpha \in [0,1)$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha$

Test PBH di raggiungibilità:

back

$$[zI - F \quad G] = \begin{bmatrix} z-\alpha & 0 & 0 & 1 \\ -1 & z-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\alpha = 1}$

$$\lambda_1 = 1 : \quad [\lambda_1 I - F \quad G] = \begin{bmatrix} \cancelto{0}{1-1} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \cancelto{0}{1-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancelto{0}{1-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 colonne lin. indip.

⇒ rango non è pieno

⇒ sistema NON è raggiungibile

$\boxed{\alpha \in [0,1)}$

$$\lambda_1 = 1 : \quad [\lambda_1 I - F \quad G] = \begin{bmatrix} \overset{\neq 0}{\boxed{1-\alpha}} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \underset{\neq 0}{\boxed{1-\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice ha rango pieno

$$\lambda_2 = \alpha : \quad [\lambda_2 I - F \quad G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{\boxed{\alpha-1}} & 1 \end{bmatrix}$$

matrice ha rango pieno

Il sistema è raggiungibile se $\alpha \in [0, 1)$

back

② Autovalori di F hanno tutti parte reale ≥ 0

$\Rightarrow$ Rivelabilità = Osservabilità

Test PBH di osservabilità:

$$\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-\alpha & 0 & 0 \\ -1 & z-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

$\boxed{\alpha = 1}$

$$\lambda_1 = 1 : \quad \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3 righe lin indip.

$\Downarrow$

matrice ha rango pieno

||

$\Downarrow$

back

Il sistema è oss.
e quindi rivelabile

$$\boxed{\alpha \in [0,1)}$$

$\neq 0$ $\neq 0$ $\neq 0$ $\neq 0$

$$\lambda_1 = 1 : \quad \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

$= 0$ $= 0$

$\neq 0$ $\neq 0$

$\alpha = 0$: 3 righe lin indip.
$\Rightarrow$ matrice ha rango pieno

$\alpha \in (0,1)$: 3 righe lin. indip.
$\Rightarrow$ matrice ha rango pieno

$$\lambda_1 = \alpha : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \overset{\neq 0}{0} \\ 0 & 0 & \overset{\neq 0}{\alpha - 1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underset{\substack{=0 \\ \neq 0}}{\alpha} & \underset{\substack{=0 \\ \neq 0}}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0$: 2 righe lin. indip.
$\Rightarrow$ matrice NON ha rango pieno
$\Rightarrow$ sistema NON è osservabile e quindi rivelabile

$\alpha \in (0,1)$: 3 righe lin. indip.
$\Rightarrow$ matrice ha rango pieno

Il sistema è rivelabile se $\alpha \in (0, 1]$

③ $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$

back

Test PBH di osservabilità:

$$PBH_1 = \begin{bmatrix} zI - F \\ h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-\alpha & 0 & 0 \\ -1 & z-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PBH_2 = \begin{bmatrix} zI - F \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-\alpha & 0 & 0 \\ -1 & z-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & z-1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

Nel caso $\alpha = 0$ il sistema non è rivelabile da entrambe le uscite, quindi non è rivelabile utilizzandone una sola

$\boxed{\alpha = 1}$

$\lambda_1 = 1$:

PBH$_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice non ha rango pieno

⇓

Il sistema non è rivelabile dalla prima uscita

PBH$_2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice non ha rango pieno

⇓

Il sistema non è rivelabile dalla seconda uscita

$\boxed{\alpha \in [0,1)}$ $\quad \alpha \neq 0$

$\lambda_1 = 1$:

PBH$_2$

$$\begin{bmatrix} \overset{\neq 0}{\boxed{1-\alpha}} & 0 & 0 \\ -1 & \overset{\neq 0}{\boxed{1-\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underset{\neq 0}{\boxed{\alpha}} & \underset{\neq 0}{\boxed{\alpha}} \end{bmatrix}$$

3 righe lin. indip

⇓

matrice ha rango pieno

$\lambda_2 = \alpha$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{\neq 0}{\boxed{\alpha-1}} \\ 0 & \underset{\neq 0}{\boxed{\alpha}} & \underset{\neq 0}{\boxed{\alpha}} \end{bmatrix}$$

3 righe lin. indip.

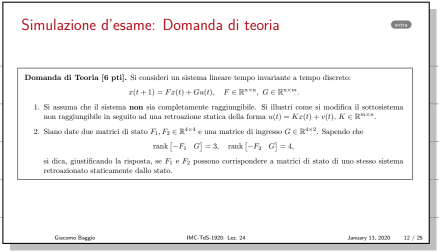
⇓

matrice ha rango pieno

back

Il sistema è rivelabile da una sola uscita (la seconda) se $\alpha \in (0,1)$.

back



Simulazione d'esame: Domanda di teoria

Domanda di Teoria [6 pti]. Si consideri un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n},\ G \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

1. Si assuma che il sistema **non** sia completamente raggiungibile. Si illustri come si modifica il sottosistema non raggiungibile in seguito ad una retroazione statica della forma $u(t) = Kx(t) + v(t)$, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
2. Siano date due matrici di stato $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e una matrice di ingresso $G \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Sapendo che

$$\text{rank}\begin{bmatrix}-F_1 & G\end{bmatrix} = 3, \quad \text{rank}\begin{bmatrix}-F_2 & G\end{bmatrix} = 4,$$

si dica, giustificando la risposta, se F_1 e F_2 possono corrispondere a matrici di stato di uno stesso sistema retroazionato staticamente dallo stato.

$$x(t+1) = F\,x(t) + G\,u(t)$$

1) Sistema non ragg.

$$\Downarrow$$

Possiamo portare il sistema in forma di Kalman di ragg. attraverso un cambio di base T

$$F_K = T^{-1} F T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G_K = T^{-1} G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(F_{22}, 0)$ è il sottosistema non ragg.

back

Scriviamo K nella base T : $K_K = K T = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$

$$F_K + G_K K_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 K_1 & G_1 K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} + G_1 K_1 & F_{12} + G_1 K_2 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}$$

Il sottosistema non ragg. non viene modificato

back

2) $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ $\quad G \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

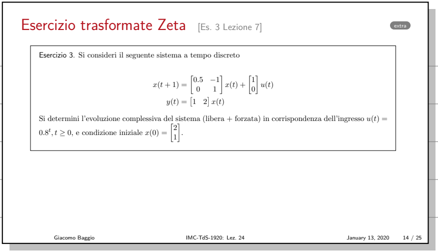
rank $[-F_1 \quad G] = 3$ $\qquad$ rank $[-F_2 \quad G] = 4$

Per il test PBH:

$\lambda_1 = 0$ è autovalore non ragg. di (F_1, G)

$\lambda_1 = 0$ NON è un autovalore non ragg. di (F_2, G)

Poiché il sottosistema non ragg. non viene modificato da una retroazione statica, (F_1, G) è (F_2, G) NON possono corrispondere ad uno sistema retroazionato dallo stato



Esercizio trasformate Zeta [Es. 3 Lezione 7]

extra

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Si determini l'evoluzione complessiva del sistema (libera + forzata) in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 0.8^t, t \geq 0$, e condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Giacomo Baggio IMC-TdS-1920: Lez. 24 January 13, 2020 14 / 25

back

$$x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{F} x(t) + \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{G} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}}_{H} x(t)$$

$$u(t) = 0.8^t, \quad t \geq 0, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{evoluzione} \\ \text{libera}}}{y_\ell(t)} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{evoluzione} \\ \text{forzata}}}{y_f(t)} \xrightarrow{\text{trasf. Zeta}} Y(z) = Y_\ell(z) + Y_f(z)$$

$$= H z (zI - F)^{-1} G x(0) + H (zI - F)^{-1} G U(z)$$

$$U(z) = \frac{z}{z - 0.8}$$

$$Y_\ell(z) = H z \,(zI - F)^{-1} x(0) = z \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - 0.5 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= z \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-0.5} & \frac{-1}{(z-0.5)(z-1)} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{z}{z-0.5} & \frac{2z(z-1)}{(z-0.5)(z-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2z}{z-0.5} + \frac{2z(z-1)}{(z-0.5)(z-1)} = \frac{4z}{z-0.5}$$

$$y_\ell(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{4z}{z-0.5}\right] = 4\,(0.5)^{t} = 4\;2^{-t}$$

$$Y_f(z) = H(zI-F)^{-1}G\;U(z)$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z-0.5} & \dfrac{2(z-1)}{(z-0.5)(z-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{z}{z-0.8} = \frac{z}{(z-0.5)(z-0.8)}$$

$$\tilde{Y}_f(z) \triangleq \frac{Y_f(z)}{z} = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.8)} = \frac{A}{z-0.5} + \frac{B}{z-0.8}$$

$$= \frac{A(z-0.8) + B(z-0.5)}{(z-0.5)(z-0.8)}$$

back

$$= \frac{(A+B)\,z - 0.8\,A - 0.5\,B}{(z-0.5)\,(z-0.8)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -0.8\,A - 0.5\,B = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 10/3 \\ B = -10/3 \end{cases}$$

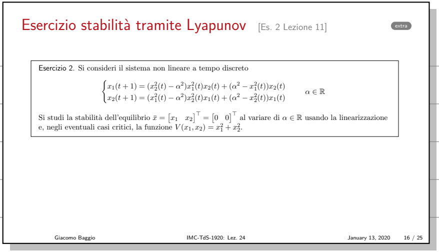
$$Y_f(z) = z\,\tilde{Y}_f(z) = \frac{-10/3\,z}{z-0.5} + \frac{10/3\,z}{z-0.8}$$

$$y_f(t) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y_f(z)\right] = -\frac{10}{3}(0.5)^t + \frac{10}{3}(0.8)^t = -\frac{10}{3}\,2^{-t} + \frac{10}{3}(0.8)^t$$

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = 4\cdot 2^{-t} - \frac{10}{3}\,2^{-t} + \frac{10}{3}(0.8)^t$$

back

$$= \frac{2}{3} 2^{-t} + \frac{10}{3} (0,8)^{t} = \frac{1}{3} 2^{-t+1} + \frac{10}{3} (0,8)^{t}$$



Esercizio stabilità tramite Lyapunov [Es. 2 Lezione 11]

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_2^2(t) - \alpha^2)x_1^2(t)x_2(t) + (\alpha^2 - x_1^2(t))x_2(t) \\ x_2(t+1) = (x_1^2(t) - \alpha^2)x_2^2(t)x_1(t) + (\alpha^2 - x_2^2(t))x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando la linearizzazione e, negli eventuali casi critici, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

back

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_2^2(t) - \alpha^2)\, x_1^2(t)\, x_2(t) + (\alpha^2 - x_1^2(t))\, x_2(t) \\ x_2(t+1) = (x_1^2(t) - \alpha^2)\, x_2^2(t)\, x_1(t) + (\alpha^2 - x_2^2(t))\, x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 0 \end{bmatrix}$$

back

$$\Delta_{J(\bar{x})}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -\alpha^2 \\ -\alpha^2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \alpha^4 \implies \lambda_{1,2} = \pm \alpha^2$$

$\bar{x}$ asint. stabile se $\alpha^2 < 1 \iff -1 < \alpha < 1$

$\bar{x}$ instabile se $\alpha^2 > 1 \iff \alpha < -1, \ \alpha > 1$

$\alpha = \pm 1$ caso critico

Usiamo Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\Delta V(x_1, x_2) = V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t))$$

$$= \left(\left(x_2^2 - 1 \right) x_1^2 x_2 + \left(1 - x_1^2 \right) x_2 \right)^2 +$$

$$+ \left(\left(x_1^2 - 1 \right) x_2^2 x_1 + \left(1 - x_2^2 \right) x_1 \right)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$= \Big(\overbrace{x_1^2 x_2^3 - 2 x_1^2 x_2}^{\triangleq a_1} + x_2 \Big)^2 + \Big(\overbrace{x_1^3 x_2^2 - 2 x_2^2 x_1}^{\triangleq a_2} + x_1 \Big)^2$$

$$- x_1^2 - x_2^2$$

$$= a_1^2 + 2 a_1 x_2 + \cancel{x_1^2} + a_2^2 + 2 a_2 x_1 + \cancel{x_1^2} - \cancel{x_1^2} - \cancel{x_2^2}$$

$$= \left(x_1^2 x_2^3 - 2 x_1^2 x_2 \right)^2 + 2 \left(x_1^2 x_2^3 - 2 x_1^2 x_2 \right) x_2 +$$

$$+ \left(x_1^3 x_2^2 - 2x_2^2 x_1\right)^2 + 2\left(x_1^3 x_2^2 - 2x_2^2 x_1\right) x_1$$

$$= x_1^2 x_2^2 \left(x_1 x_2^2 - 2x_1\right)^2 + 2x_1^2 x_2^2 \left(x_2 - 2\right)$$

$$+ x_1^2 x_2^2 \left(x_1^2 x_2 - 2x_2\right)^2 + 2x_1^2 x_2^2 \left(x_1 - 2\right)$$

$$= -x_1^2 x_2^2 \underbrace{\left[-\left(x_1 x_2^2 - 2x_1\right)^2 - 2\left(x_2 - 2\right) - \left(x_1^2 x_2^2 - 2x_2\right)^2 - 2\left(x_1 - 2\right) \right]}_{\triangleq\, p(x_1, x_2)}$$

$$= -x_1^2 x_2^2 \, p(x_1, x_2) \qquad p(0,0) = 4$$

$\hookrightarrow$ in un intorno di $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V(x_1, x_2) \leq 0$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ è (almeno) sempl. stabile

Per capire se $\bar{x}$ è asint. o sempl. stabile usiamo Krasowskii:

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \Delta V(x_1, x_2) = 0 \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_1(t) = 0 \Rightarrow x_2(t+1) = 0$$

$$x_2(t) = 0 \Rightarrow x_1(t+1) = 0$$

$$x_1(0) = \alpha, \; x_2(0) = 0 \Rightarrow x_1(1) = 0, \; x_2(1) = \alpha$$

$$\Rightarrow x_1(2) = \alpha, \; x_2(2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1(3) = 0, \; x_2(3) = \alpha \quad \ldots\ldots$$

$\exists$ traiettorie ($\neq \bar{x}$) che rimangono interamente in N

$\Rightarrow$ Per il Teorema di Krasowskii $\bar{x}$ è sempl. stabile!