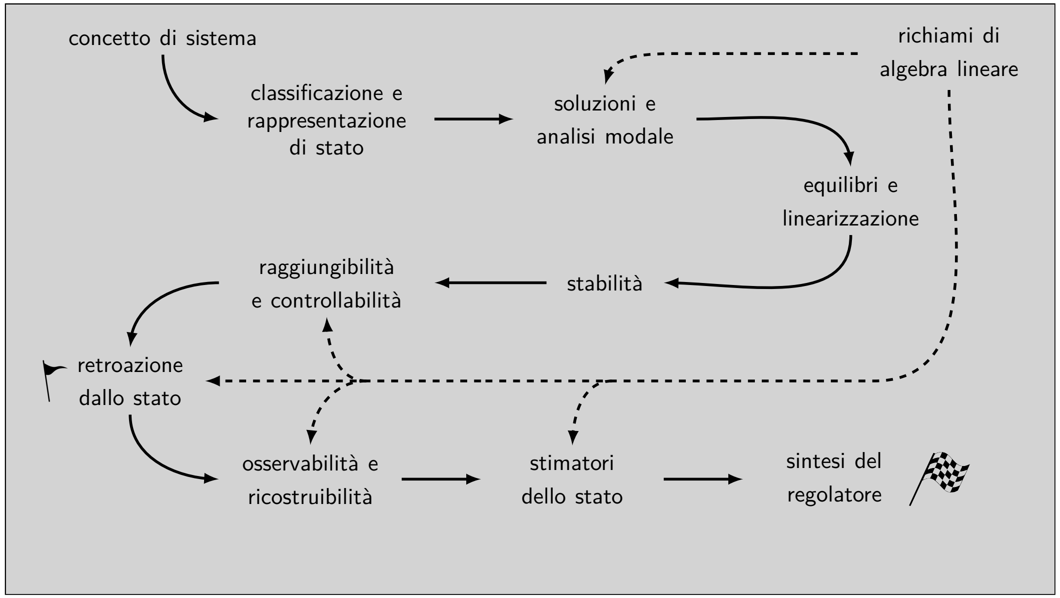
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 24: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



In questa lezione

- Simulazione d'esame
    - Esercizio trasformate Zeta
        - Esercizio stabilità tramite Lyapunov
            - Q & A

Simulazione d'esame: Esercizio 1

Esercizio 1 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\alpha^2)x_1(t) \\ x_2(t+1) &= x_1^2(t) + (1-\alpha)x_2(t) + x_2^2(t) + u(t) \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Per $u(t) = \bar{u} =$ costante, $\forall\, t$, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. Per $u(t) = 0$, $\forall\, t$, studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati al punto 1 al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.
3. Per i casi critici del punto 2 (se ne esistono), si dica, giustificando la risposta, se gli equilibri trovati sono asintoticamente stabili oppure no. [Suggerimento: *si analizzi l'evoluzione di una delle due variabili di stato.*]

Simulazione d'esame: soluzione Esercizio 1

1. $\alpha = 0$: $\begin{cases} \text{infiniti eq. } \begin{bmatrix} \beta & \pm\sqrt{-\beta^2 - \bar{u}} \end{bmatrix}^\top, \beta \in \mathbb{R}, \beta^2 + \bar{u} \le 0 & \bar{u} < 0 \\ \text{1 eq. } \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top & \bar{u} = 0 \\ \text{nessun eq.} & \bar{u} > 0 \end{cases}$

   $\alpha \neq 0$: $\begin{cases} \text{2 eq. } \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\bar{u}}}{2} \end{bmatrix}^\top & \alpha^2 - 4\bar{u} > 0 \\ \text{1 eq. } \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top & \alpha^2 - 4\bar{u} = 0 \\ \text{nessun eq.} & \alpha^2 - 4\bar{u} < 0 \end{cases}$

2. $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ asint. stabile se $0 < \alpha < \sqrt{2}$, instabile se $\alpha < 0$, $\alpha > \sqrt{2}$

   $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \end{bmatrix}^\top$ asint. stabile se $-\sqrt{2} < \alpha < 0$, instabile se $\alpha < -\sqrt{2}$, $\alpha > 0$

3. Gli equilibri non sono asintoticamente stabili

Simulazione d'esame: Esercizio 2

Esercizio 2 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F e i modi elementari del sistema.
2. Progettare, se possibile, un controllore in retroazione **dal solo primo ingresso** in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i seguenti: e^{-t}, te^{-t}, $\frac{t^2}{2}e^{-t}$.
3. Progettare, se possibile, un controllore in retroazione **da entrambi gli ingressi** in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i seguenti: e^{-t}, te^{-t}.

Simulazione d'esame: soluzione Esercizio 2

1. $F_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Modi elementari: 1, e^{t}, e^{-2t}

2. $K = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

3. $K = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Simulazione d'esame: Esercizio 3

Esercizio 3 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [0,1].$$

1. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta raggiungibile.
2. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta rivelabile.
3. Determinare i valori del parametro $\alpha \in [0,1]$ (se ne esistono) tali per cui il sistema risulta rivelabile utilizzando **una sola uscita** del sistema.

Simulazione d'esame: soluzione Esercizio 3

1. Sistema raggiungibile se $\alpha \in [0, 1)$
2. Sistema rivelabile se $\alpha \in (0, 1]$
3. Sistema rivelabile da una uscita se $\alpha \in (0, 1)$

Simulazione d'esame: Domanda di teoria

Domanda di Teoria [6 pti]. Si consideri un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n},\ G \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

1. Si assuma che il sistema **non** sia completamente raggiungibile. Si illustri come si modifica il sottosistema non raggiungibile in seguito ad una retroazione statica della forma $u(t) = Kx(t) + v(t)$, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
2. Siano date due matrici di stato $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ e una matrice di ingresso $G \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Sapendo che

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -F_1 & G \end{bmatrix} = 3, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -F_2 & G \end{bmatrix} = 4,$$

si dica, giustificando la risposta, se F_1 e F_2 possono corrispondere a matrici di stato di uno stesso sistema retroazionato staticamente dallo stato.

Esercizio trasformate Zeta [Es. 3 Lezione 7]

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Si determini l'evoluzione complessiva del sistema (libera + forzata) in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 0.8^t, t \geq 0$, e condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio trasformate Zeta [Es. 3 Lezione 7]

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

Si determini l'evoluzione complessiva del sistema (libera + forzata) in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 0.8^t, t \geq 0$, e condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soluzione: $y(t) = \frac{1}{3}2^{-t+1} + \frac{10}{3}(0.8)^t,\ t \geq 0.$

Esercizio stabilità tramite Lyapunov [Es. 2 Lezione 11]

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_2^2(t) - \alpha^2)x_1^2(t)x_2(t) + (\alpha^2 - x_1^2(t))x_2(t) \\ x_2(t+1) = (x_1^2(t) - \alpha^2)x_2^2(t)x_1(t) + (\alpha^2 - x_2^2(t))x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando la linearizzazione e, negli eventuali casi critici, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio stabilità tramite Lyapunov [Es. 2 Lezione 11]

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = (x_2^2(t) - \alpha^2)x_1^2(t)x_2(t) + (\alpha^2 - x_1^2(t))x_2(t) \\ x_2(t+1) = (x_1^2(t) - \alpha^2)x_2^2(t)x_1(t) + (\alpha^2 - x_2^2(t))x_1(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando la linearizzazione e, negli eventuali casi critici, la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Soluzione: $\bar{x}$ asint. stabile se $|\alpha| < 1$, instabile se $|\alpha| > 1$, sempl. stabile se $\alpha = \pm 1$