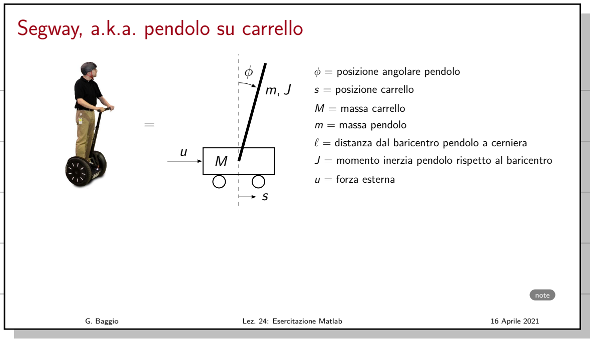
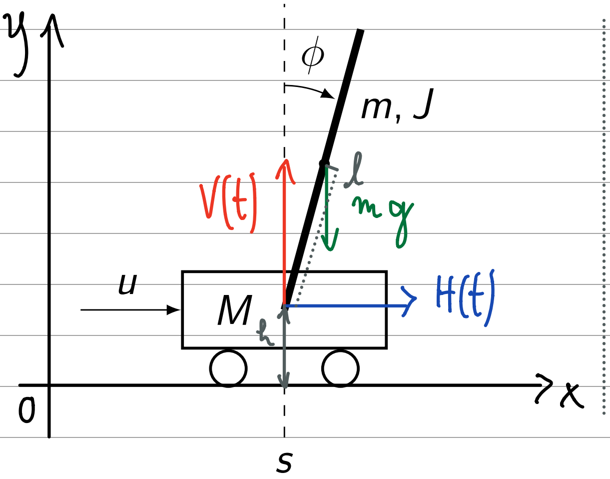


$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}$

u = ingresso = forza esterna applicata al carrello

$y = \phi$ | Assunzione: non ci sono attriti



$V(t)$ = forza esercitata dal carrello sul pendolo lungo l'asse y

$H(t)$ = forza esercitata dal carrello sul pendolo lungo l'asse x

Moto del baricentro del pendolo:

asse x: $$m \frac{d^2}{dt^2}\left(s(t) + \ell \sin\phi\right) = H(t) \qquad (1)$$

asse y: $$m \frac{d^2}{dt^2}\left(h + \ell \cos\phi\right) = V(t) - mg \qquad (2)$$

Moto di rotazione del pendolo rispetto al baricentro:

$$J \frac{d^2\phi}{dt^2} = V(t)\, \ell \sin\phi - H(t)\, \ell \cos\phi \qquad (3)$$

Da (1):

$$H(t) = m \frac{d}{dt}\left(\dot{s} + \ell \cos\phi\, \dot{\phi}\right) = m\left(\ddot{s} - \ell \sin\phi\, \dot{\phi}^2 + \ell \cos\phi\, \ddot{\phi}\right) \qquad (1')$$

Da (2):

$$V(t) - mg = m\frac{d}{dt}\left(-l\sin\phi\,\dot\phi\right) = m\left(-l\cos\phi\,\dot\phi^2 - l\sin\phi\,\ddot\phi\right) \quad (2')$$

Usiamo (1') + (2') in (3):

$$J\ddot\phi = l\sin\phi\left(mg - ml\cos\phi\,\dot\phi^2 - ml\sin\phi\,\ddot\phi\right) +$$
$$- l\cos\phi\left(m\ddot s - ml\sin\phi\,\dot\phi^2 + ml\cos\phi\,\ddot\phi\right)$$

$$= mgl\sin\phi - \cancel{ml^2\sin\phi}\cos\phi\,\dot\phi^2 - ml^2\sin^2\phi\,\ddot\phi$$
$$- ml\cos\phi\,\ddot s + \cancel{ml^2\sin\phi}\cos\phi\,\dot\phi^2 - ml^2\cos^2\phi\,\ddot\phi$$

$$= mgl\sin\phi - ml\cos\phi\,\ddot s - ml^2\ddot\phi\,(\overbrace{\sin^2\phi + \cos^2\phi}^{1})$$

$$\Longrightarrow (J + ml^2)\ddot\phi = mgl\sin\phi - ml\cos\phi\,\ddot s$$

$$\Longrightarrow \ddot\phi = \frac{mgl}{J+ml^2}\sin\phi - \frac{ml}{J+ml^2}\cos\phi\,\ddot s \quad (3')$$

<u>Assumiamo che $M \gg m$:</u>

Moto del carrello:

$$M\ddot s = u - H(t) \Longrightarrow M\ddot s = u \quad (4)$$

reazione del pendolo sul carrello (proporzionale a m)

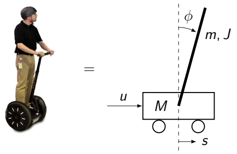
Usiamo (4) in (3'):

$$\ddot{\phi} = \frac{mgl}{J+ml^2}\sin\phi - \frac{ml}{M(J+ml^2)}\cos\phi\, u \qquad l' \triangleq \frac{J+ml^2}{ml}$$

Sistema in spazio di stato: $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\phi} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\phi} = \frac{g}{l'}\sin\phi - \frac{1}{Ml'}\cos\phi\, u = \frac{g}{l'}\sin x_1 - \frac{1}{Ml'}\cos x_1 \cdot u \\ y = \phi = x_1 \end{cases}$$

Segway linearizzato attorno a $\bar{x} = (0,0)$



ϕ = posizione angolare pendolo
s = posizione carrello
M = massa carrello
m = massa pendolo
ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera
J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro
u = forza esterna

note

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\phi} = x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = \ddot{\phi} = \frac{g}{\ell'} \sin x_1 - \frac{1}{M\ell'} \cos x_1 \cdot u = f_2(x_1, x_2, u) \\ y = \phi = x_1 \end{cases}$$

$\bar{x} = (0,0), \quad u(\cdot) = 0$
$\hookrightarrow$ equilibrio

Σ linearizzato attorno a $\bar{x}$ per $\bar{u} = 0$: $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{u=\bar{u} \\ x=\bar{x}}} x + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{u=\bar{u} \\ x=\bar{x}}} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell'} \cos\bar{x} + \frac{1}{M\ell'} \sin\bar{x} \cdot \bar{u} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \cos\bar{x} \end{bmatrix} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell' & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/l' & 0 \end{bmatrix}}^{F} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml'} \end{bmatrix}}^{G} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

Autovalori di F: $\Delta_F(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -g/l' & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{g}{l'} \implies \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l'}}$

$\implies$ c'è sempre un autovalore positivo

$\implies \bar{x}$ è instabile