Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 24: Esercitazione Matlab®

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

In questa lezione

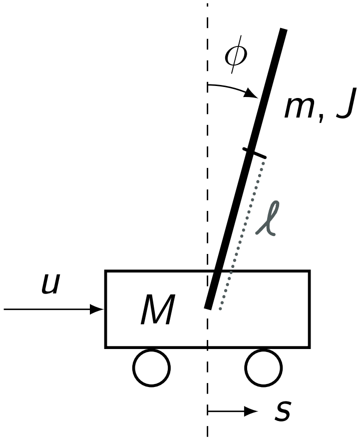
- ▷ Esempio: controllo di un segway
- ▷ Alcune funzioni utili di Matlab®
- ▷ Implementazione in Matlab®

Segway, a.k.a. pendolo su carrello

note

Segway, a.k.a. pendolo su carrello

$=$



ϕ = posizione angolare pendolo

s = posizione carrello

M = massa carrello

m = massa pendolo

ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera

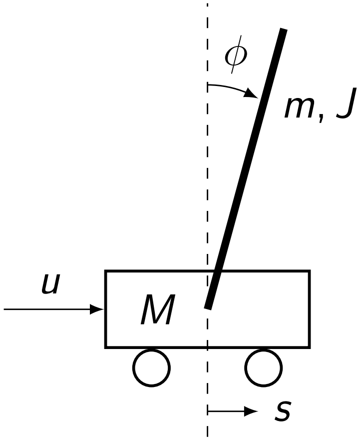
J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro

u = forza esterna

note

Segway, a.k.a. pendolo su carrello

=



ϕ = posizione angolare pendolo

s = posizione carrello

M = massa carrello

m = massa pendolo

ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera

J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro

u = forza esterna

$$\boxed{M \gg m} \implies M\ddot{s} = u$$

$$x = (x_1, x_2) = (\phi, \dot{\phi})$$

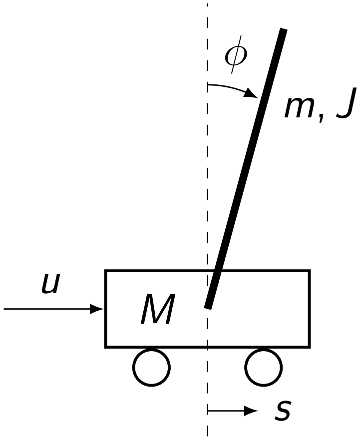
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{\ell'} \sin(x_1) - \frac{1}{M\ell'} u \cos(x_1) \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\ell' = \frac{J + m\ell^2}{m\ell}$$

note

Segway linearizzato attorno a $\bar{x} = (0, 0)$

$=$



ϕ = posizione angolare pendolo

s = posizione carrello

M = massa carrello

m = massa pendolo

ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera

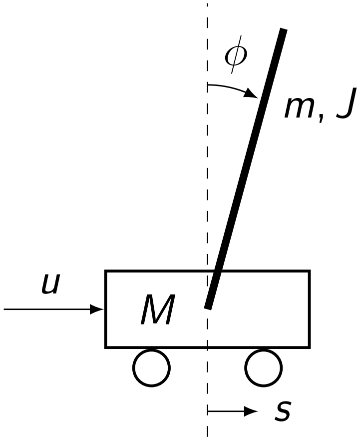
J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro

u = forza esterna

note

Segway linearizzato attorno a $\bar{x} = (0, 0)$

$=$



ϕ = posizione angolare pendolo

s = posizione carrello

M = massa carrello

m = massa pendolo

ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera

J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro

u = forza esterna

$$\boxed{\bar{x} = (0, 0), \; u(\cdot) = 0}$$

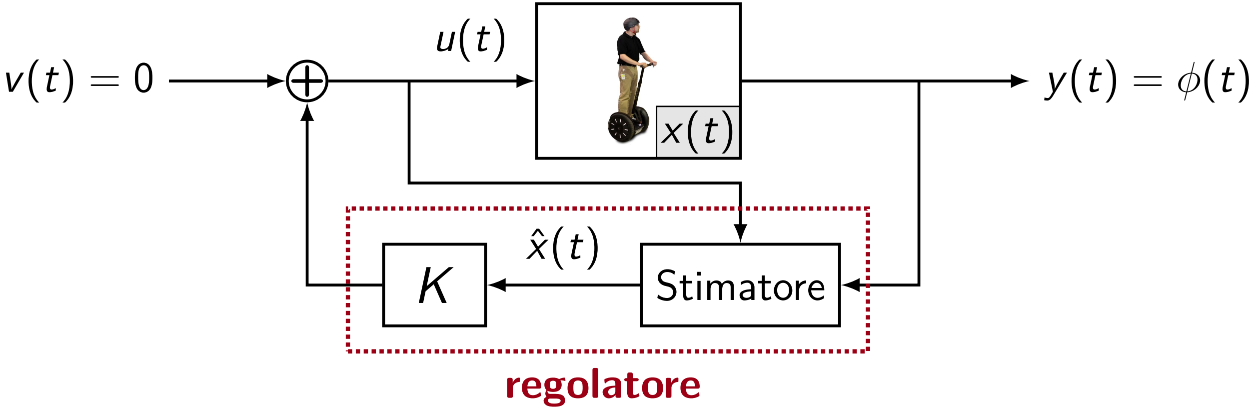
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell'} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

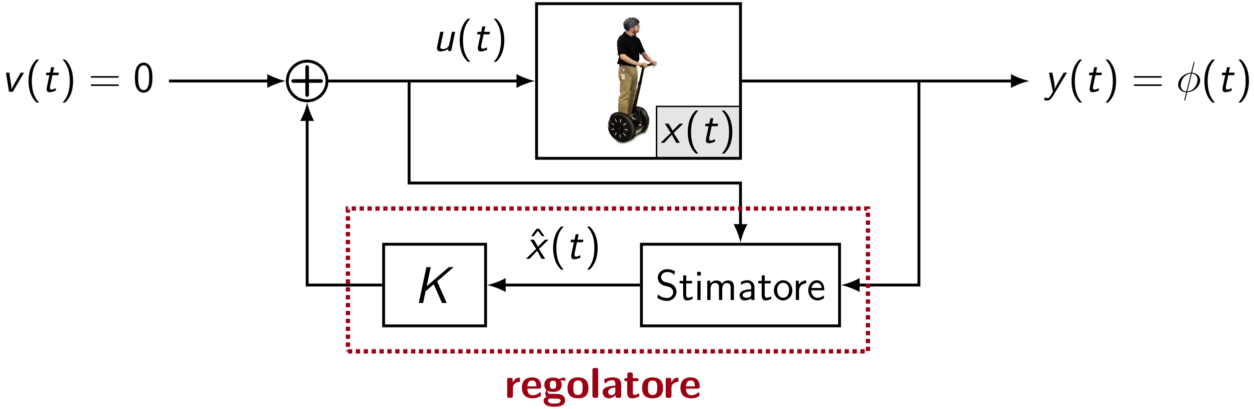
$$\boxed{\bar{x} = (0, 0) \text{ instabile}}$$

note

Progettazione di un regolatore stabilizzante



Progettazione di un regolatore stabilizzante



Calcolo controllore (matrice K) e stimatore (matrice L) in Matlab®

In questa lezione

- Esempio: controllo di un segway
- Alcune funzioni utili di Matlab®
- Implementazione in Matlab®

Algebra lineare e matrici: funzioni utili

- `eig(F)`: autovalori `F`
  `[T,D] = eig(F)`: autovalori (matrice diagonale `D`) e autovettori (matrice `T`) di `F`

Algebra lineare e matrici: funzioni utili

- `eig(F)`: autovalori `F`
  `[T,D] = eig(F)`: autovalori (matrice diagonale `D`) e autovettori (matrice `T`) di `F`

- `jordan(F)`: forma di Jordan di `F`
  `[T,J] = jordan(F)`: forma di Jordan (matrice `J`) e cambio base (matrice `T`) di `F`

Algebra lineare e matrici: funzioni utili

- `eig(F)`: autovalori `F`
  `[T,D] = eig(F)`: autovalori (matrice diagonale `D`) e autovettori (matrice `T`) di `F`

- `jordan(F)`: forma di Jordan di `F`
  `[T,J] = jordan(F)`: forma di Jordan (matrice `J`) e cambio base (matrice `T`) di `F`

- `rank(F)`: rango di `F`
- `det(F)`: determinante di `F`
- `expm(F)`: esponenziale di matrice di `F` ($e^{\mathtt{F}}$)
- `orth(F)`: base (ortonormale) di im(`F`)
- `null(F)`: base (ortonormale) di ker(`F`)

Control System Toolbox: funzioni utili

- `sys = ss(F,G,H,J)`: sistema in spazio di stato con matrici $(\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{J})$ (t.c.)
  `sys = ss(F,G,H,J,-1)`: sistema in spazio di stato con matrici $(\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{J})$ (t.d.)
  $\Downarrow$
  T = tempo di campionamento
- `tf(sys)`: funzione di trasferimento del sistema `sys`

Control System Toolbox: funzioni utili

- `sys = ss(F,G,H,J)`: sistema in spazio di stato con matrici $(\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{J})$ (t.c.)
  `sys = ss(F,G,H,J,-1)`: sistema in spazio di stato con matrici $(\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{J})$ (t.d.)

- `tf(sys)`: funzione di trasferimento del sistema `sys`

- `K = place(F,G,p)`: matrice di retroazione `K` tale che `F-GK` ha autovalori in `p`
  (**N.B.** se `p` contiene autovalori multipli usare `K = acker(F,G,p)`)

Control System Toolbox: funzioni utili

- `sys = ss(F,G,H,J)`: sistema in spazio di stato con matrici $(\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{J})$ (t.c.)
  `sys = ss(F,G,H,J,-1)`: sistema in spazio di stato con matrici $(\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{J})$ (t.d.)

- `tf(sys)`: funzione di trasferimento del sistema `sys`

- `K = place(F,G,p)`: matrice di retroazione `K` tale che `F-GK` ha autovalori in `p`
  (**N.B.** se `p` contiene autovalori multipli usare `K = acker(F,G,p)`)

- `R = ctrb(sys)`: matrice di raggiungibilità `R` di `sys`
  `O = obsv(sys)`: matrice di osservabilità `O` di `sys`

Control System Toolbox: funzioni utili

- `sys = ss(F,G,H,J)`: sistema in spazio di stato con matrici $(\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{J})$ (t.c.)
  `sys = ss(F,G,H,J,-1)`: sistema in spazio di stato con matrici $(\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{J})$ (t.d.)

- `tf(sys)`: funzione di trasferimento del sistema `sys`

- `K = place(F,G,p)`: matrice di retroazione `K` tale che `F-GK` ha autovalori in `p`
  (**N.B.** se `p` contiene autovalori multipli usare `K = acker(F,G,p)`)

- `R = ctrb(sys)`: matrice di raggiungibilità `R` di `sys`
  `O = obsv(sys)`: matrice di osservabilità `O` di `sys`

- `initial(sys,x0)`: evoluzione libera dell'uscita di `sys` con condizione iniziale `x0`
  `lsim(sys,u,T,x0)`: evoluzione dell'uscita di `sys` con condizione iniziale `x0` e ingresso `u` per tempi nel vettore `T`

In questa lezione

- ▷ Esempio: controllo di un segway
- ▷ Alcune funzioni utili di Matlab®
- ▷ Implementazione in Matlab®

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

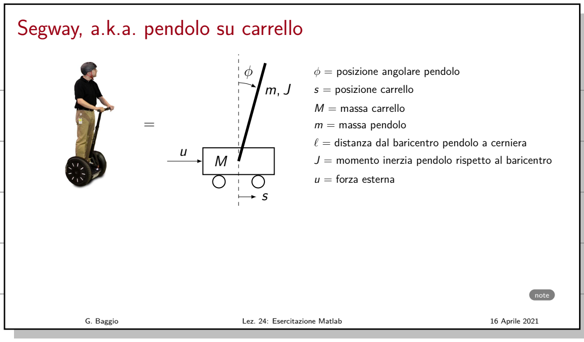
Lez. 24: Esercitazione Matlab®

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

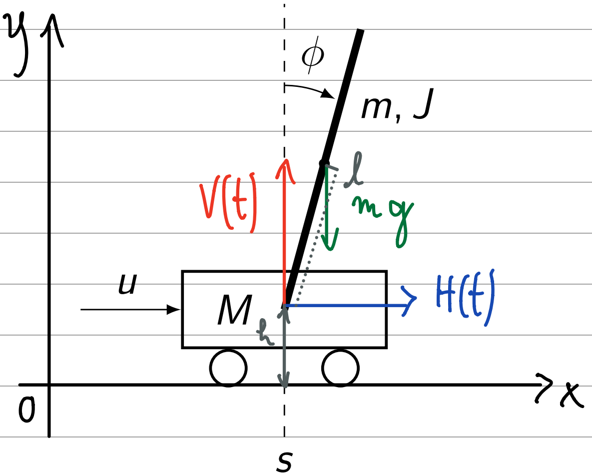
baggiogi.github.io



$x_1 = \phi, \quad x_2 = \dot{\phi}$

u = ingresso = forza esterna applicata al carrello

$y = \phi$ | Assunzione: non ci sono attriti



$V(t)$ = forza esercitata dal carrello sul pendolo lungo l'asse y

$H(t)$ = forza esercitata dal carrello sul pendolo lungo l'asse x

Moto del baricentro del pendolo:

asse x: $$m \frac{d^2}{dt^2}\left(s(t) + \ell \sin\phi\right) = H(t) \qquad (1)$$

asse y: $$m \frac{d^2}{dt^2}\left(h + \ell \cos\phi\right) = V(t) - mg \qquad (2)$$

Moto di rotazione del pendolo rispetto al baricentro:

$$J \frac{d^2\phi}{dt^2} = V(t)\,\ell \sin\phi - H(t)\,\ell\cos\phi \qquad (3)$$

Da (1):

$$H(t) = m \frac{d}{dt}\left(\dot{s} + \ell\cos\phi\,\dot{\phi}\right) = m\left(\ddot{s} - \ell\sin\phi\,\dot{\phi}^2 + \ell\cos\phi\,\ddot{\phi}\right) \qquad (1')$$

Da (2):

$$V(t) - mg = m\frac{d}{dt}\left(-l\sin\phi\,\dot\phi\right) = m\left(-l\cos\phi\,\dot\phi^2 - l\sin\phi\,\ddot\phi\right) \quad (2')$$

Usiamo (1') + (2') in (3):

$$J\ddot\phi = l\sin\phi\left(mg - ml\cos\phi\,\dot\phi^2 - ml\sin\phi\,\ddot\phi\right) +$$
$$- l\cos\phi\left(m\ddot s - ml\sin\phi\,\dot\phi^2 + ml\cos\phi\,\ddot\phi\right)$$

$$= mgl\sin\phi - \cancel{ml^2\sin\phi}\cos\phi\,\dot\phi^2 - ml^2\sin^2\phi\,\ddot\phi$$
$$- ml\cos\phi\,\ddot s + \cancel{ml^2\sin\phi}\cos\phi\,\dot\phi^2 - ml^2\cos^2\phi\,\ddot\phi$$

$$= mgl\sin\phi - ml\cos\phi\,\ddot s - ml^2\ddot\phi\,\overbrace{\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right)}^{1}$$

$$\Longrightarrow (J + ml^2)\ddot\phi = mgl\sin\phi - ml\cos\phi\,\ddot s$$

$$\Longrightarrow \ddot\phi = \frac{mgl}{J+ml^2}\sin\phi - \frac{ml}{J+ml^2}\cos\phi\,\ddot s \quad (3')$$

Assumiamo che $M \gg m$:

Moto del carrello:

$$M\ddot s = u - H(t) \Longrightarrow M\ddot s = u \quad (4)$$

reazione del pendolo sul carrello (proporzionale a m)

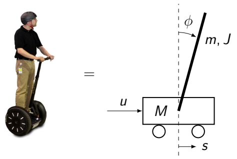
Usiamo (4) in (3'):

$$\ddot{\phi} = \frac{mgl}{J + ml^2} \sin\phi - \frac{ml}{M(J+ml^2)} \cos\phi \, u \qquad l' \triangleq \frac{J + ml^2}{ml}$$

Sistema in spazio di stato: $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\phi} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{\phi} = \frac{g}{l'} \sin\phi - \frac{1}{Ml'} \cos\phi \, u = \frac{g}{l'} \sin x_1 - \frac{1}{Ml'} \cos x_1 \cdot u \\ y = \phi = x_1 \end{cases}$$

Segway linearizzato attorno a $\bar{x} = (0, 0)$



- ϕ = posizione angolare pendolo
- s = posizione carrello
- M = massa carrello
- m = massa pendolo
- ℓ = distanza dal baricentro pendolo a cerniera
- J = momento inerzia pendolo rispetto al baricentro
- u = forza esterna

note

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\phi} = x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = \ddot{\phi} = \frac{g}{\ell'} \sin x_1 - \frac{1}{M\ell'} \cos x_1 \cdot u = f_2(x_1, x_2, u) \\ y = \phi = x_1 \end{cases}$$

$\bar{x} = (0, 0), \quad u(\cdot) = 0$

$\hookrightarrow$ equilibrio

Σ linearizzato attorno a $\bar{x}$ per $\bar{u} = 0$: $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{u = \bar{u} \\ x = \bar{x}}} x + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{u = \bar{u} \\ x = \bar{x}}} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell'} \cos \bar{x} + \frac{1}{M\ell'} \sin \bar{x} \cdot \bar{u} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \cos \bar{x} \end{bmatrix} u$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell' & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g/\ell' & 0 \end{bmatrix}}_{F} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M\ell'} \end{bmatrix}}_{G} u \\ y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} x \end{cases}$$

Autovalori di F: $\Delta_F(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -g/\ell' & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{g}{\ell'} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell'}}$

$\Rightarrow$ c'è sempre un autovalore positivo

$\Rightarrow \bar{x}$ è instabile