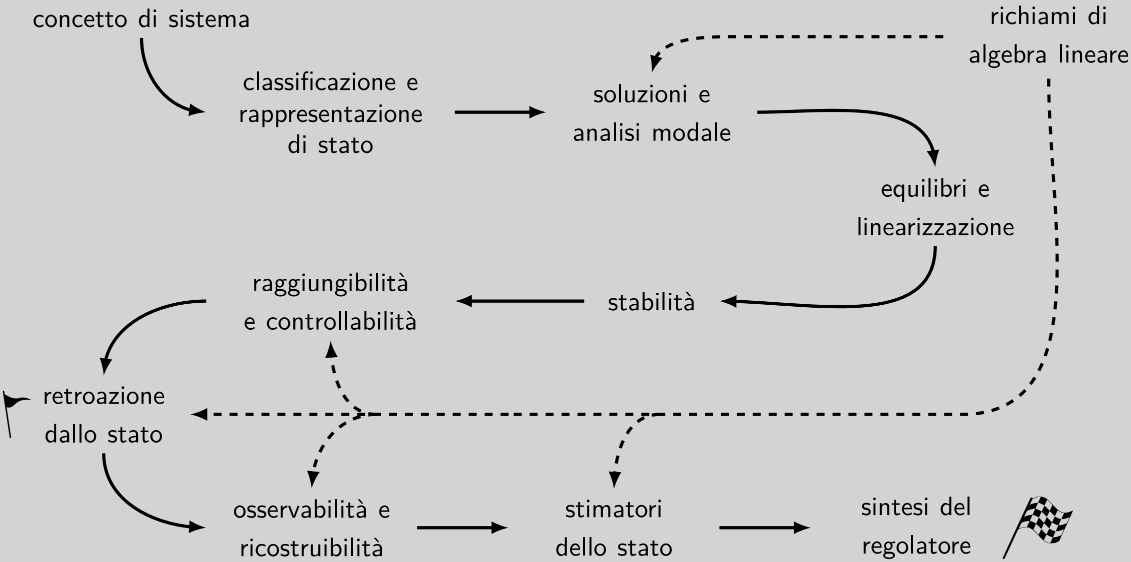
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore

In questa lezione: esercizi misti!

- Esercizio 1: forma di Jordan e analisi modale
- Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- Esercizio 3: raggiungibilità/controllabilità
- Esercizio 4: retroazione dallo stato

In questa lezione: esercizi misti!

- ▷ Esercizio 1: forma di Jordan e analisi modale
- ▷ Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Esercizio 3: raggiungibilità/controllabilità
- ▷ Esercizio 4: retroazione dallo stato

Esercizio 1 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 4 Luglio 2018]

extra

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Forma di Jordan e modi del sistema?
2. Insieme di stati iniziali che generano evoluzioni di stato non divergenti?
3. Valori di α tali che $y(t)$ converga a zero per ogni stato iniziale $x(0)$?

Esercizio 1: soluzione

1. $F_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Modi: 2^{-t}, 2^t.

2. $\mathcal{X}_0 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. $\alpha =$. -2

In questa lezione: esercizi misti!

- Esercizio 1: forma di Jordan e analisi modale
- Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- Esercizio 3: raggiungibilità/controllabilità
- Esercizio 4: retroazione dallo stato

Esercizio 2 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 20 Gennaio 2017]

extra

$$\dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) - x_2^3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t)$$

1. Per $u(t) = 0$, $\forall t$, carattere di stabilità di $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?
2. Per $u(t) = Kx(t)$, matrice K tale che $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sia asintoticamente stabile?

   (Utilizzare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$, se necessario)

Esercizio 2: soluzione

1. $\bar{x}$ instabile.

2. $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & k_2 \end{bmatrix}$, $k_2 < -1$.

In questa lezione: esercizi misti!

- ▷ Esercizio 1: forma di Jordan e analisi modale
- ▷ Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Esercizio 3: raggiungibilità/controllabilità
- ▷ Esercizio 4: retroazione dallo stato

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 4 Settembre 2018]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Raggiungibilità, controllabilità, stabilizzabilità del sistema?
2. Ingresso $u(t)$ che porta il sistema da $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $x(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$?

Esercizio 3: soluzione

1. Sistema non raggiungibile, non controllabile e non stabilizzabile.

2. $u(0) = u(1) = \frac{3}{2}$.

In questa lezione: esercizi misti!

- ▷ Esercizio 1: forma di Jordan e analisi modale
- ▷ Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Esercizio 3: raggiungibilità/controllabilità
- ▷ Esercizio 4: retroazione dallo stato

Esercizio 4 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 12 Settembre 2017]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Stabilizzabilità del sistema da un singolo ingresso?

2. Matrice K tale che il polinomio minimo di $F + GK$ sia $\Psi_{F+GK}(\lambda) = \lambda^3$?

Esercizio 4: soluzione

1. Sistema stabilizzabile solo dal secondo ingresso.

2. Ad esempio, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it
baggiogi.github.io

Esercizio 1 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 4 Luglio 2018]

extra

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Forma di Jordan e modi del sistema?
2. Insieme di stati iniziali che generano evoluzioni di stato non divergenti?
3. Valori di α tali che $y(t)$ converga a zero per ogni stato iniziale $x(0)$?

back

$$x(t+1) = F\,x(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = H\,x(t) \qquad H = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Forma di Jordan di F ?

- Autovalori di F : $\lambda_1 = 2$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \\ 2 & \underbrace{-1 \quad\quad 1}_{F_{22}} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F_{22}}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{22}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3/2 & 1/2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)(\lambda - 1) - \frac{1}{2}$$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases}$$

Autovalori F: $\lambda_1 = 2$, $\nu_1 = 2$, $g_1 = ?$

$\lambda_2 = 1/2$, $\nu_2 = 1 = g_2$

$$g_1 = \dim \operatorname{Ker}(F - \lambda_1 I) = 3 - \operatorname{rank}(F - \lambda_1 I) = 3 - 1 = 2$$

back

$$F-2I=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1/2&-1/2\\2&-1&-1\end{bmatrix} \text{ lin. dip.} \Rightarrow \operatorname{rank}(F-2I)=1$$

poiché $\nu_i = g_i$ $\forall$ autovalore di F $\Rightarrow$ F diagonalizzabile

$$F_J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1/2\end{bmatrix}$$

Modi elementari del sistema: 2^t, $\left(\frac{1}{2}\right)^t = 2^{-t}$, $t\in\mathbb{Z}$, $t\geq 0$

2) Insieme di x_0 tali che $x(t)\longrightarrow 0$, $t\to\infty$, X_0

x_0 deve essere autovettore di F relativo a $\frac{1}{2}$

back

$x_0 \in \ker\left(F - \frac{1}{2} I\right)$

$$F - \frac{1}{2} I = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad x_0 \in \ker\left(F - \frac{1}{2} I\right) \iff x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X}_0 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3) Valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $y(t) \rightsquigarrow 0$, $t \to \infty$, $\forall\, x(0)$

$$y(t) = \underbrace{H F^t}\, x(0) \qquad H = [\alpha \quad 1 \quad 1]$$

$$(H F^t)^T = (F^T)^t H^T$$

back

$\exists\, \alpha$ t.c. H^T è autovettore di F^T relativo all'autovalore $\frac{1}{2}$

$$F^T H^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + 1 + 2 \\ \frac{3}{2} - 1 \\ -\frac{1}{2} + 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\alpha + 3 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\alpha + 3 = \frac{1}{2}\alpha \implies \frac{3}{2}\alpha = -3 \implies \alpha = -\frac{6}{3} = -2$$

Esercizio 2 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 20 Gennaio 2017]

extra

$\dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) - x_2^3(t)$

$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t)$

1. Per $u(t) = 0$, $\forall t$, carattere di stabilità di $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?
2. Per $u(t) = Kx(t)$, matrice K tale che $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sia asintoticamente stabile?

   (Utilizzare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$, se necessario)

back

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) $u(t) = 0 \quad t \geq 0$

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ = matrice di stato del sistema linearizzato

$J_f(\bar{x})$ ha autovalori $0, 1$ $\Rightarrow$ Per il teorema del linearizzato $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è punto di eq. instabile

2) $u(t) = K\,x(t) = k_1\,x_1(t) + k_2\,x_2(t)$ $\qquad K = [\,k_1 \quad k_2\,]$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 \end{cases}$$

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+k_1 & 1+k_2 \end{bmatrix}$$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ def. positiva

back

$$\dot V(x_1, x_2) = 2x_1\dot x_1 + 4x_2^3\dot x_2$$

$$= 2x_1(-x_1^3 - x_2^3) + 4x_2^3(x_1 + x_2 + k_1x_1 + k_2x_2)$$

$$= -2x_1^4 + \underbrace{(2+4k_1)}_{0}x_1x_2^3 + \underbrace{4(1+k_2)}_{<0}x_2^4$$

$$2 + 4k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2}$$

$$4 + 4k_2 < 0 \Rightarrow k_2 < -1$$

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & k_2 \end{bmatrix}, \quad k_2 < -1 \Rightarrow \bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ è asint. stabile}$$

perché $\dot V(x_1, x_2)$ è def. neg.

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 4 Settembre 2018]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Raggiungibilità, controllabilità, stabilizzabilità del sistema?
2. Ingresso $u(t)$ che porta il sistema da $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $x(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$?

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) (F, G) raggiungibile ?

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalori F: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$

Test PBH di raggiungibilità:

$$
\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & z & -1 & 1 \\ 0 & 0 & z-2 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{z=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

rango pieno

$$
\xrightarrow{z=0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}
$$

rango non è pieno

$$
\xrightarrow{z=2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

rango non è pieno

(F, G) non raggiungibile (perché abbiamo degli autoval. non ragg.)

(F, G) non controllabile (perché $\lambda_3 = 2$ è un autoval. non ragg.)

(F, G) non stabilizzabile (perché " " " " " ")

2) $\exists\ u(t)$ t.c. $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$?

$$x(2) = F^2 x(0) + R_2 u_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$x(2) - F^2 x(0) \in \operatorname{Im} R_2$$

back

$$\begin{bmatrix}4\\6\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&2\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in \operatorname{Im} R_2 = \operatorname{Im}\,[G \;\; FG] = \operatorname{Im}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{span}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$F^2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&2\\0&0&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\6\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix} \in \operatorname{Im} R_2 \Rightarrow \exists \text{ l'ingresso desiderato!}$$

$$x(2) - F^2 x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = R_2 u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1) + u(0) \\ u(1) + u(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1) + u(0) \\ u(1) + u(0) \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow u(0) = u(1) = \frac{3}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{l'ingresso non è unico} \\ u(1) + u(0) = 3 \end{array} \right]$$

Esercizio 4 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 12 Settembre 2017]

extra

$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1. Stabilizzabilità del sistema da un singolo ingresso?

2. Matrice K tale che il polinomio minimo di $F + GK$ sia $\Psi_{F+GK}(\lambda) = \lambda^3$?

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ g_1 & g_2 \end{array}$$

1) Autovalori di F: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

- (F, g_1)

Test PBH:

$$[zI - F \;\; g_1] = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 2 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \end{bmatrix} \overset{z=1}{=} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rango non è pieno

$\Rightarrow (F, g_1)$ è NON stabilizzabile

- (F, g_2)

Test PBH:

$$[zI - F \quad g_2] = \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 1 \end{bmatrix} \overset{z=1}{=} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ rango pieno}$$

$\Rightarrow (F, g_2)$ è stabilizzabile

2)

$$F + GK \qquad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2k_{11} & 2k_{12} & 2k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}}_{GK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2k_{11} & 2k_{12} & 2k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & 1+k_{23} \end{bmatrix}$$

$2k_{11} \to 0 \qquad 2k_{12} \to 0 \qquad 2k_{13} \to k_{13} = \frac{1}{2}$

$k_{21} \to 0 \qquad k_{22} \to 0 \qquad k_{23} \to -1$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{F+GK}(\lambda) = \lambda^3$$

$$(F+GK)_J = \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \right.$$

$$\Delta_{(F+GK)_J}(\lambda) = \Delta_{F+GK}(\lambda) = \lambda^3$$

$$\Psi_{F+GK}(\lambda) = \lambda^2$$

$$\Psi_{F+GK}(\lambda) = \lambda^3$$