Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

In questa lezione: esercizi misti!

- Esercizio 1: forma di Jordan e analisi modale
- Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- Esercizio 3: raggiungibilità/controllabilità
- Esercizio 4: retroazione dallo stato

Esercizio 1 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 4 Luglio 2018]

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Forma di Jordan e modi del sistema?
2. Insieme di stati iniziali che generano evoluzioni di stato non divergenti?
3. Valori di α tali che $y(t)$ converga a zero per ogni stato iniziale $x(0)$?

Esercizio 1: soluzione

1. $F_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Modi: 2^{-t}, 2^t.
2. $\mathcal{X}_0 = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
3. $\alpha = -2$.

Esercizio 2 [riadattato da Es. 1 tema d'esame 20 Gennaio 2017]

$\dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) - x_2^3(t)$

$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t)$

1. Per $u(t) = 0$, $\forall t$, carattere di stabilità di $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?
2. Per $u(t) = Kx(t)$, matrice K tale che $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sia asintoticamente stabile?

   (Utilizzare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$, se necessario)

Esercizio 2: soluzione

1. $\bar{x}$ instabile.
2. $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & k_2 \end{bmatrix}$, $k_2 < -1$.

Esercizio 3 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 4 Settembre 2018]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Raggiungibilità, controllabilità, stabilizzabilità del sistema?
2. Ingresso $u(t)$ che porta il sistema da $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $x(2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$?

Esercizio 3: soluzione

1. Sistema non raggiungibile, non controllabile e non stabilizzabile.
2. Ad esempio, $u(0) = u(1) = \frac{3}{2}$.

Esercizio 4 [riadattato da Es. 2 tema d'esame 12 Settembre 2017]

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Stabilizzabilità del sistema da un singolo ingresso?

2. Matrice K tale che il polinomio minimo di $F + GK$ sia $\Psi_{F+GK}(\lambda) = \lambda^3$?

Esercizio 4: soluzione

1. Sistema stabilizzabile solo dal secondo ingresso.

2. Ad esempio, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.