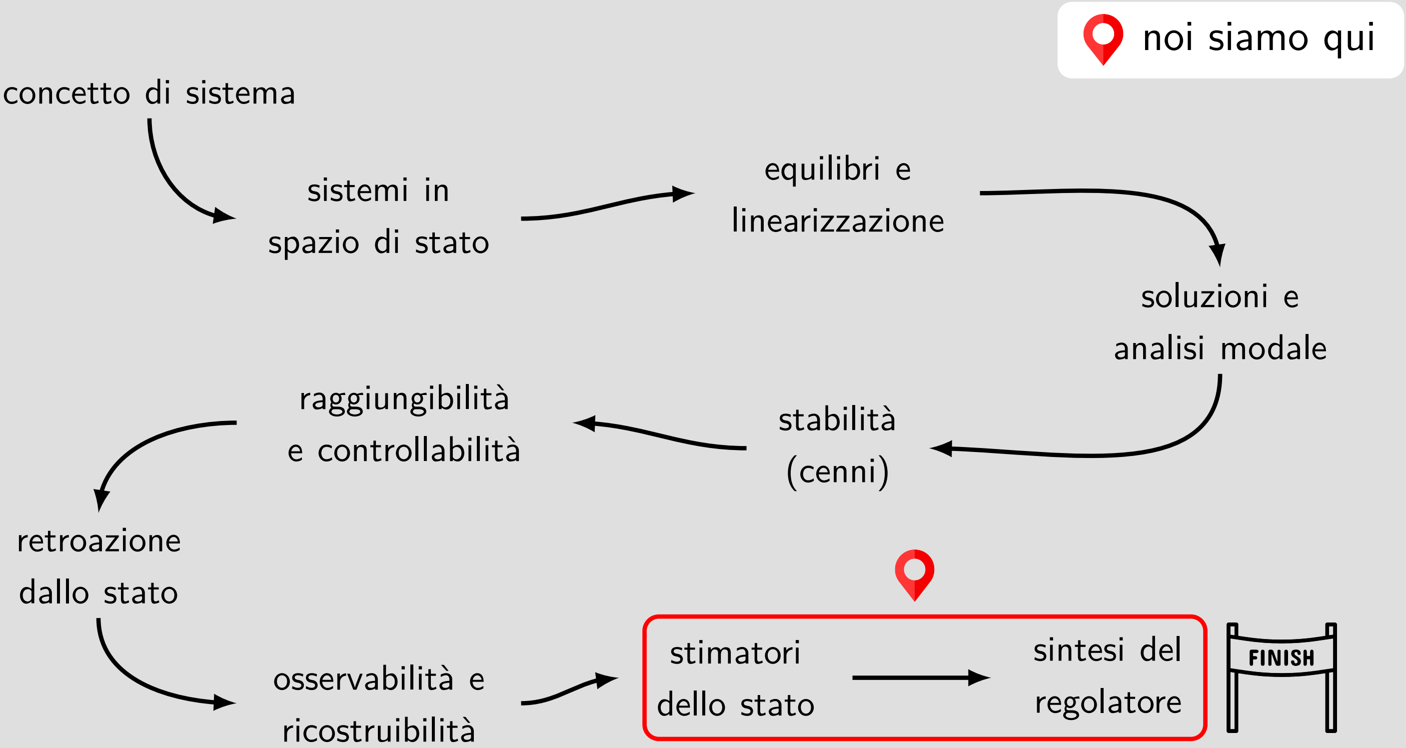
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.
- Sistema duale e sue proprietà

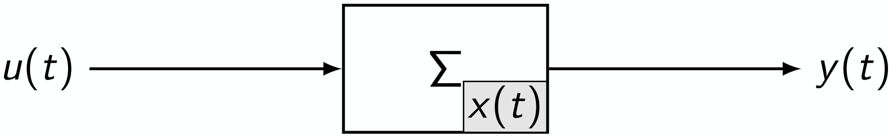
In questa lezione

- ▷ Stimatori dello stato
- ▷ Rivelabilità
- ▷ Il regolatore: struttura ed equazioni dinamiche

Il problema della stima dello stato

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



Assunzione: lo stato $x(t)$ non è direttamente accessibile

Problema: costruire una "buona" stima $\hat{x}(t)$ di $x(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e conoscenza del modello

Stimatori ad anello aperto

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

stimatore ad anello aperto

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

note

Stimatori ad anello aperto

stimatore ad anello aperto

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

$\boxed{\text{errore di stima } e(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty \text{ se } F \text{ è instabile !!!}}$

note

Stimatori ad anello chiuso (alla Luenberger)

stimatore ad anello chiuso

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ = guadagno dello stimatore

note

Stimatori ad anello chiuso

stimatore ad anello chiuso

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \quad \begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}(t) \end{aligned}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ = guadagno dello stimatore

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)e(t)$$

> errore di stima $e(t)$ tende a zero se $F + LH$ è asintoticamente stabile (e in questo caso F può anche essere instabile) !!!

note

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

2. Se tutti gli autovalori di $F+LH$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!

$$e(t+1) = (F+LH)\,e(t)$$

$\exists$ stimatore dead-beat $\iff$ $\Sigma = (F, H)$ è ricostruibile

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

2. Se tutti gli autovalori di $F+LH$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!

3. Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

2. Se tutti gli autovalori di $F+LH$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!

3. Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.

4. Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a t.c. (unica eccezione: a t.c. non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

note

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

Il sistema è osservabile quindi uno stimatore dead-beat esiste.

Il guadagno dello stimatore dead-beat è $L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

note

In questa lezione

- ▷ Stimatori dello stato
- ▷ Rivelabilità
- ▷ Il regolatore: struttura ed equazioni dinamiche

Rivelabilità a t.d. (detectability)

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con modulo < 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo < 1.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con parte reale < 0.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale < 0.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

In questa lezione

- Stimatori dello stato
- Rivelabilità
- Il regolatore: struttura ed equazioni dinamiche

Il regolatore

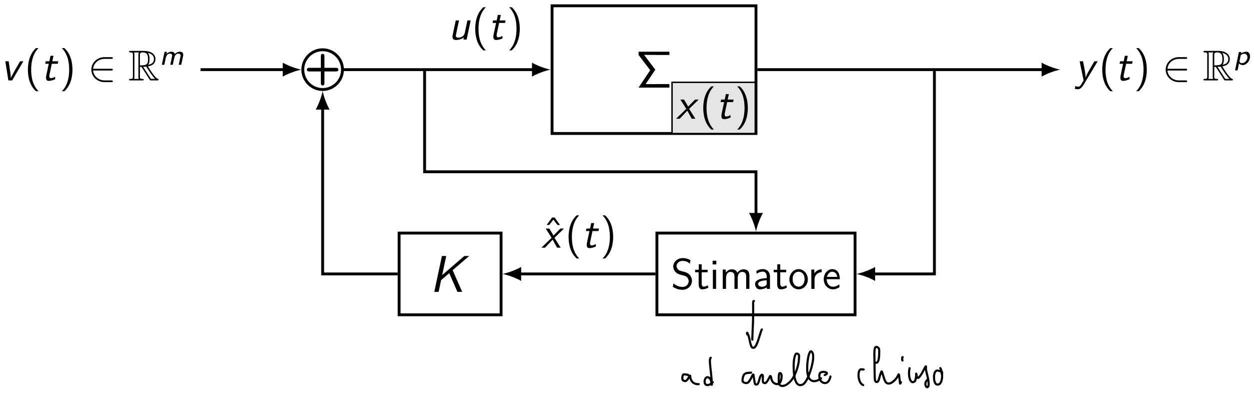
$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Il regolatore

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

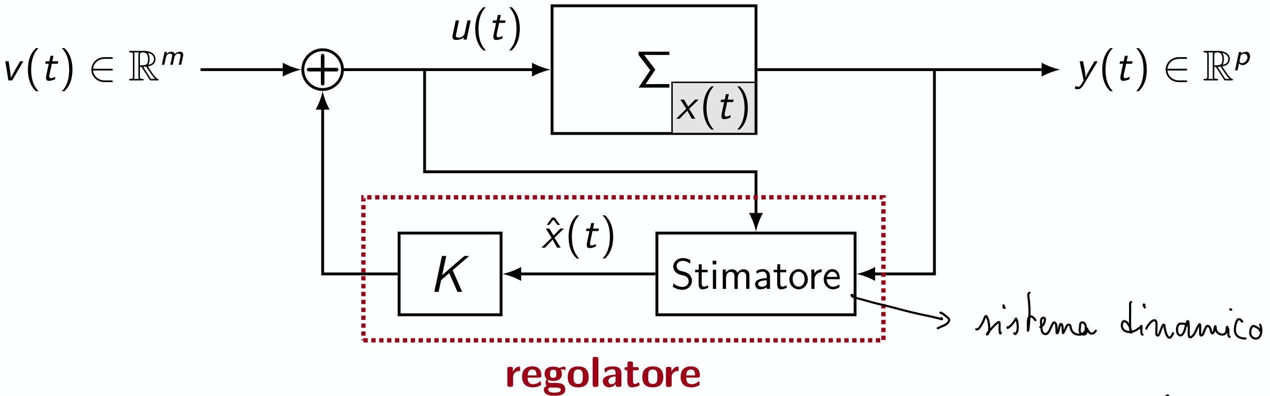
m ingressi
p uscite
n stati



Il regolatore

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



$=$ stimatore dello stato $+$ controllo in retroazione dallo stato (stimato)

Il regolatore: equazioni dinamiche

sistema Σ:
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

legge di controllo: $$u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$$

stimatore dello stato: $$\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$$

note

Il regolatore: equazioni dinamiche

sistema Σ:
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

$\Longrightarrow$ sistema regolato:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

note

Regolatori stabilizzanti

sistema regolato:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix}}^{F_{reg}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

t.d. |autovalori F_{reg}| < 1

t.c. Re(autov. F_{reg}) < 0

Definizione: Un regolatore si dice stabilizzante se il sistema regolato è asintoticamente stabile.

Definizione: Un regolatore si dice dead-beat se l'evoluzione dello stato del sistema regolato va a zero in un numero finito di passi.

x_{reg} autovalori F_{reg} = 0

Principio di separazione

sistema regolato:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

note

Principio di separazione

sistema regolato:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

sistema regolato nella base T:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

note

Principio di separazione

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix}}^{F_{reg}} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{autovalori di } \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} = \text{autovalori di } F+GK \cup \text{autovalori di } F+LH \text{ !!!}}$$

Principio di separazione

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

autovalori di $\left[\begin{smallmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{smallmatrix}\right]$ = autovalori di $F+GK \cup$ autovalori di $F+LH$!!!

Principio di separazione: Gli autovalori della matrice di stato del sistema regolato sono dati dall'unione degli autovalori di $F+GK$ e di $F+LH$. Quindi la sintesi del controllo in retroazione (allocazione degli autovalori di $F+GK$) e dello stimatore (allocazione degli autovalori di $F+LH$) possono essere effettuate in modo indipendente.

Esistenza di regolatori stabilizzanti

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se Σ è sia stabilizzabile che rivelabile.

$\exists K$ t.c. $F+GK$ è asint. stabile

$\exists L$ t.c. $F+LH$ è asint. stabile

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore dead-beat se e solo se Σ è sia controllabile che ricostruibile.

$\exists$ controllore dead-beat

$\exists$ stimatore dead-beat

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it
baggiogi.github.io

Stimatori ad anello aperto

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

stimatore ad anello aperto

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}}$$

note

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

$$\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases} \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

Errore di stima:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = Fx(t) + \cancel{Gu(t)} - F\hat{x}(t) - \cancel{Gu(t)}$$

$$= F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

$$\Longrightarrow \quad e(t) = F^t e(0) = F^t(x_0 - \hat{x}_0)$$

Se F è "instabile" allora per un qualche $e(0)$:

$$e(t) \xrightarrow{t \to \infty} \infty$$

Stimatori ad anello chiuso

$$\Sigma: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

stimatore ad anello chiuso

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ = guadagno dello stimatore

$$\hat{\Sigma}: \begin{cases} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - \overbrace{L\,(y(t) - H\hat{x}(t))}^{\text{termine "correttivo"}} \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{cases} \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ = guadagno dello stimatore

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\begin{aligned} e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) &= Fx(t) + \cancel{Gu(t)} - F\hat{x}(t) - \cancel{Gu(t)} \\ &\quad + L\,(Hx(t) - H\hat{x}(t)) \\ &= F\,(x(t) - \hat{x}(t)) + LH\,(x(t) - \hat{x}(t)) \\ &= (F + LH)\,(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)\, e(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad e(t) = (F + LH)^t e(0) = (F+LH)^t (x_0 - \hat{x}_0)$$

Anche se F è "instabile" abbiamo la possibilità di rendere $F+LH$ "asint. stabile" agendo su $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Stimatore dead-beat.

Polinomio desiderato $p(\lambda) = \lambda^2$.

1) Esistenza dello stimatore.

$\exists$ stimatore dead-beat $\iff \Sigma$ è ricostruibile

Σ è osservabile?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{rank } \mathcal{O} = 2$$

$\Rightarrow \Sigma$ osservabile

$\Rightarrow \Sigma$ ricostruibile

$\Rightarrow \exists$ stimatore dead-beat

2) Calcolo del guadagno $L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}$ dello stimatore dead-beat.

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) \overset{!}{=} p(\lambda) = \lambda^2$$

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_1 \\ \ell_2 & \ell_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda - \ell_1 & -1-\ell_1 \\ -\ell_2 & \lambda - 1 - \ell_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - \ell_1)(\lambda - 1 - \ell_2) - \ell_2(1 + \ell_1)$$

$$= \lambda^2 + (-l_1 - 1 - l_2)\lambda + l_1(1 + l_2) - l_1 l_2 - l_2$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-1 - l_1 - l_2) + l_1 + \cancel{l_1 l_2} - \cancel{l_1 l_2} - l_2$$

$$\begin{cases} -1 - l_1 - l_2 = 0 \\ l_1 - l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 - 2l_2 = 0 \\ l_1 = l_2 \end{cases} \quad \begin{cases} l_2 = -1/2 \\ l_1 = -1/2 \end{cases} \implies L = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Il regolatore: equazioni dinamiche

sistema Σ: $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$
$y(t) = Hx(t)$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

$$\Sigma : \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

Stimatore: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

$$x_{reg}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + G(K\hat{x}(t) + v(t)) \\ \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + G(K\hat{x}(t) + v(t)) - L(Hx(t) - H\hat{x}(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + GK\hat{x}(t) + Gv(t) \\ \hat{x}(t+1) = -LHx(t) + (F + GK + LH)\hat{x}(t) + Gv(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{reg}(t+1) = \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ n \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c} F & GK \\ \hdashline -LH & F+GK+LH \end{array}\right] \end{array} x_{reg}(t) + \begin{array}{c} \\ n \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} n \\ \left[\begin{array}{c} G \\ \hdashline G \end{array}\right] \end{array} v(t) \\ y(t) = Hx(t) = n \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \end{array} x_{reg}(t) \end{cases}$$

Principio di separazione

regolatore:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$F_{reg} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix}$$

$$G_{reg} = \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} \qquad H_{reg} = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$$

Cambio base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$

$$z(t) = T^{-1} x_{reg}(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

errore di stima

$$F'_{reg} = T^{-1} F_{reg} T = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F & GK \\ F+LH & \cancel{GK} - F - \cancel{GK} - LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ \underbrace{\cancel{F}+\cancel{LH}-\cancel{F}-\cancel{LH}}_{0} & F+LH \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} F+GK & -GK \\ \hline 0 & F+LH \end{array}\right]$$

$$G'_{reg} = T^{-1} G_{reg} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H'_{reg} = H_{reg} T = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$$