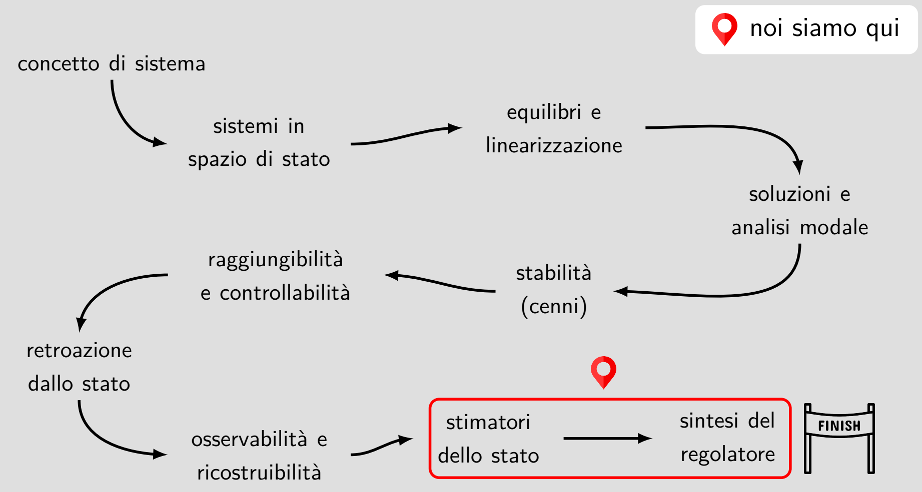
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Stimatori dello stato e regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



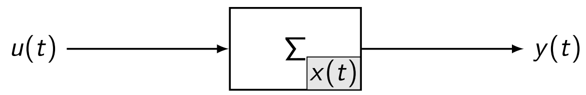
In questa lezione

- ▷ Stimatori dello stato
- ▷ Rivelabilità
- ▷ Il regolatore: struttura ed equazioni dinamiche

Il problema della stima dello stato

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



Assunzione: lo stato $x(t)$ non è direttamente accessibile

Problema: costruire una "buona" stima $\hat{x}(t)$ di $x(t)$ a partire da dati ingresso/uscita e conoscenza del modello

Stimatori ad anello aperto

$$\Sigma: \begin{array}{l} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array}$$

stimatore ad anello aperto

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \begin{array}{l} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{array}}$$

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) = Fe(t)$$

$\boxed{\text{errore di stima } e(t) \xrightarrow{t\to\infty} \infty \text{ se } F \text{ è instabile !!!}}$

Stimatori ad anello chiuso

$$\Sigma: \begin{array}{l} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{array}$$

stimatore ad anello chiuso

$$\boxed{\hat{\Sigma}: \begin{array}{l} \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \end{array}}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ = guadagno dello stimatore

errore di stima: $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$e(t+1) = x(t+1) - \hat{x}(t+1) = F(x(t) - \hat{x}(t)) + LH(x(t) - \hat{x}(t)) = (F + LH)e(t)$$

errore di stima $e(t)$ tende a zero se $F + LH$ è asintoticamente stabile (e in questo caso F può anche essere instabile) !!!

Stimatori ad anello chiuso: osservazioni

1. Se il sistema è osservabile allora è sempre possible calcolare un guadagno L in grado di rendere $F+LH$ asintoticamente stabile. Per il calcolo di L possiamo usare gli stessi metodi allocazione degli autovalori visti per il controllo in retroazione!

2. Se tutti gli autovalori di $F+LH$ vengono allocati in zero l'errore di stima converge a zero in tempo finito. Lo stimatore in questo caso viene detto stimatore dead-beat!

3. Gli stimatori che abbiamo visto sono detti di stimatori di ordine intero perché stimano l'intero stato $x(t)$. In certi casi, è possibile costruire stimatori di ordine ridotto che stimano solo la parte "veramente incognita" dello stato.

4. Tutto quello che abbiamo visto si applica anche a sistemi a t.c. (unica eccezione: a t.c. non ha senso parlare di stimatori dead-beat).

Esempio

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, uno stimatore dead-beat dello stato del sistema.

Il sistema è osservabile quindi uno stimatore dead-beat esiste.

Il guadagno dello stimatore dead-beat è $L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Rivelabilità a t.d.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con modulo < 1.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con modulo < 1.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $|z| \geq 1$.

Rivelabilità a t.c.

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Definizione: Il sistema Σ si dice rivelabile se esiste uno stimatore dello stato ad anello chiuso il cui errore di stima tende asintoticamente a zero.

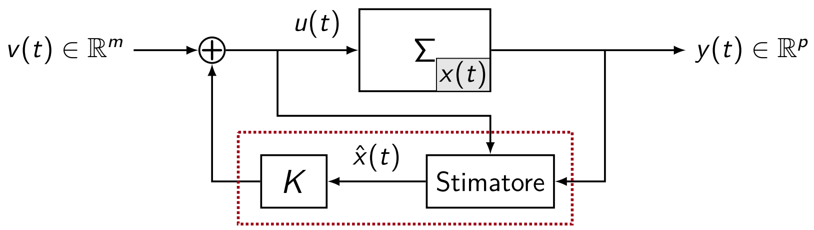
Teorema: Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. Σ è rivelabile.
2. Il sistema duale Σ_d è stabilizzabile.
3. Esiste $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha autovalori con parte reale < 0.
4. Il sottosistema non osservabile di Σ ha autovalori con parte reale < 0.
5. La matrice PBH di osservabilità $\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ ha rango n, $\forall z$ con $\Re[z] \geq 0$.

Il regolatore

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



regolatore
= stimatore dello stato + controllo in retroazione dallo stato

Il regolatore: equazioni dinamiche

sistema Σ: $\quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$

legge di controllo: $\quad u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\quad \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

$\Longrightarrow$ sistema regolato:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F + GK + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Regolatori stabilizzanti

sistema regolato:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Definizione: Un regolatore si dice stabilizzante se il sistema regolato è asintoticamente stabile.

Definizione: Un regolatore si dice dead-beat se l'evoluzione dello stato del sistema regolato va a zero in un numero finito di passi.

Principio di separazione

sistema regolato:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

sistema regolato nella base T:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Principio di separazione

regolatore nella base T:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{autovalori di } \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} = \text{autovalori di } F+GK \cup \text{autovalori di } F+LH \text{ !!!}}$$

Principio di separazione: Gli autovalori della matrice di stato del sistema regolato sono dati dall'unione degli autovalori di $F+GK$ e di $F+LH$. Quindi la sintesi del controllo in retroazione (allocazione degli autovalori di $F+GK$) e dello stimatore (allocazione degli autovalori di $F+LH$) possono essere effettuate in modo indipendente.

Esistenza di regolatori stabilizzanti

regolatore nella base T:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se Σ è sia stabilizzabile che rivelabile.

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore dead-beat se e solo se Σ è sia controllabile che ricostruibile.