Esercizio 1

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\alpha = 0$**, determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ allo stato $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

note

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}\right], \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}$$

1) Forma di Jordan di F, modi elementari e carattere

i) Calcolo autovalori di F:

$$\lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22})$$

$$\lambda(F_{11}): \ \Delta_{F_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{11}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -\alpha \\ -\alpha & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \alpha^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\alpha$$

$$\lambda(F) = \{\pm\alpha, -1\}$$

<u>Caso $\alpha = \pm 1$</u>: $\lambda_1 = -1$, $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\nu_2 = 1$, $g_2 = 1$

<u>Caso $\alpha \neq \pm 1$</u>: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +\alpha$, $\lambda_3 = -\alpha$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$, $g_1 = g_2 = g_3 = 1$

ii) Calcolo molteplicità geometriche

<u>Caso $\alpha = -1$</u>:

$$g_1 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\overbrace{}^{2}$$

<u>Caso $\alpha = +1$</u>:

$$g_1 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\overbrace{}^{1}$$

iii) Calcolo di F_J:

$$F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} & \alpha = -1 \\ \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & -\alpha & \\ & & -1 \end{bmatrix} & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

modi elementari:

$(-1)^t \longrightarrow$ limitato
$t(-1)^t \longrightarrow$ divergente
$1 \longrightarrow$ limitato

$\left.\begin{matrix} \alpha^t \\ (-\alpha)^t \end{matrix}\right\}$ $|\alpha| < 1$ convergenti, $\alpha = 1$ limitati, $|\alpha| > 1$ divergenti
$(-1)^t \longrightarrow$ limitato

Caso $\alpha = 0$: $\lambda_1 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\nu_2 = 1$

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \underbrace{\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{1} = 2$$

---

2) $\alpha = 0$: $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, calcolo u?

i) Esistenza di u. $u_2 = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = F^2 x(0) + R_2 u_2$$

$$\underbrace{x(2) - F^2 x(0)} \in \text{im}\, R_2 = X_R(2) = \text{im}\,[G \;\; FG] = \text{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \in X_R(2) \Longrightarrow \text{ingresso richiesto esiste}$$

ii) Calcolo u_2

$$x(2) - F^2 x(0) = R_2 u_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} u(1) = 1 \\ u(0) = -2 \end{cases}$$

3) $x(0)$ t.c. evoluzione libera di $x(t)$ sia puramente oscillatoria $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$$x(t) = F^t x(0) = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & \underset{\displaystyle -1}{\underset{\downarrow}{F_{22}}} \end{bmatrix}^t x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11}^t & 0 \\ * & \underset{\displaystyle (-1)^t}{\underset{\downarrow}{F_{22}^t}} \end{bmatrix} x(0)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0 \implies x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma(-1)^t \end{bmatrix} = (-1)^t \underbrace{v}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}}$$

La condizione iniziale richiesta esiste ed è $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$

Esercizio 2

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t)$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\bar{u} = 0$**, studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, si determinino, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

note

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + u = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

1) $u(t) = \bar{u} = \text{cost.}\ \forall t$. Trovare gli equilibri.

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \text{ eq.} \iff \begin{cases} 0 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 \\ 0 = -\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 + \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 \longrightarrow \bar{x}_2 = -\frac{\bar{u}}{2} \\ 2\bar{x}_1^2 = \bar{u} \longrightarrow \bar{x}_1^2 = \frac{\bar{u}}{2} \end{cases}$$

<u>Caso $\bar{u} > 0$</u>: $\bar{x}_1 = \pm\sqrt{\frac{\bar{u}}{2}}$, $\bar{x}_2 = -\frac{\bar{u}}{2}$

Due equilibri: $\left(\pm\sqrt{\frac{\bar{u}}{2}}, -\frac{\bar{u}}{2}\right)$

<u>Caso $\bar{u} = 0$</u>: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$

Un equilibrio: $(0, 0)$

<u>Caso $\bar{u} < 0$</u>: $\nexists$ equilibri

2) $\bar{u} = 0$, stabilità $\bar{x} = (0,0)$ utilizzando la linearizzazione

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x = \bar{x}} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 1 \\ -2\bar{x}_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalori di $J_f(\bar{x})$: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \mathrm{Re}[\lambda_2] > 0 \Rightarrow \bar{x}$ instabile per il Thm di linearizzazione

3) $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

k_1, k_2 t.c. $\bar{x} = (0,0)$ è asint. stabile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 = f_{k,1}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 = f_{k,2}(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$J_{f_k}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,k}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,k}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_{2,k}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2,k}}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 1 \\ -2\bar{x}_1 + k_1 & 1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & 1 + k_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{J_{f_k}(\bar{x})}(\lambda) = \det(\lambda I - J_{f_k}(\bar{x})) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -k_1 & \lambda - 1 - k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 1 - k_2) - k_1$$

$$= \lambda^2 + (-1 - k_2)\lambda - k_1$$

<u>Regola di Cartesio</u>: $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0, \quad p_1, p_0 \in \mathbb{R}$

$p(\lambda)$ ha radici con parte reale strett. neg. se e solo se $p_1, p_0 > 0$

$J_{f_k}(\bar{x})$ ha autovalori con parte reale strett. neg. se e solo se

$$\begin{cases} -1 - k_2 > 0 \\ -k_1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 < -1 \\ k_1 < 0 \end{cases} \implies$$ per $k_1 < 0$, $k_2 < -1$ $\bar{x} = (0,0)$ è asint. stabile.

Esercizio 3

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t+1) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile X_R e lo spazio non osservabile X_{NO} del sistema.
2. Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari $\left(\frac{1}{4}\right)^t$ e $t\left(\frac{1}{4}\right)^t$.

note

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ G = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow h_1 \\ \leftarrow h_2 \end{array}$$

$$g_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; g_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) X_R, X_{NO}?

$$X_R = \operatorname{im} R = \operatorname{im} [G \;\; FG \;\; F^2G]$$

$$X_{NO} = \ker \mathcal{O} = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix}$$

(F, G) in forma di Kalman? (F_{11}, G_1) è ragg.?

$$R^{(1)} = [G_1 \;\; F_{11}G_1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & \end{bmatrix}$$

$\text{rank } R^{(1)} = 2 \Rightarrow (F_{11}, G_1)$ è ragg.

$\Rightarrow (F, G)$ in forma di Kalman

$$R = \begin{bmatrix} R^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{im} R = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = X_R$$

$\text{rank } \mathcal{O} = 3 \rightarrow \Sigma$ oss

$\rightarrow X_{NO} = \{0\}$

$$X_{NO} = \ker \mathcal{O} = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \{0\}$$

(Σ osservabile ma non ragg.)

2) - $\Sigma = (F, G, H)$ stabilizzabile, rivelabile?

$X_{NO} = \{0\} \Rightarrow \Sigma$ osservabile $\Rightarrow \Sigma$ rivelabile

l'unico autovalore non ragg. di Σ è $0 \Rightarrow \Sigma$ stabilizzabile

- Numero min. di ingressi (colonne di G) tale da rendere Σ stabilizz.?

$\Sigma_1 = (F, g_1)$, Σ_1 è in forma di Kalman? (F_{11}, g_{11}) è ragg.?

$R_{11} = \begin{bmatrix} g_{11} & F_{11} g_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ rank $R_{11} = 1 \Rightarrow (F_{11}, g_{11})$ non è ragg.

$\Rightarrow \Sigma_1$ ha un autovalore non ragg. in 1 o -1

$\Rightarrow \Sigma_1$ non è stabilizz.

$\Sigma_2 = (F, g_2)$, Σ_2 è in forma di Kalman? (F_{11}, g_{21}) è ragg.?

$R_{21} = \begin{bmatrix} g_{21} & F_{11} g_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ rank $R_{21} = 1 \Rightarrow (F_{11}, g_{21})$ non è ragg.

$\Rightarrow \Sigma_2$ non è stabilizz.

$\Longrightarrow$ numero min. di ingressi è 2

- Numero minimo di uscite (righe di H) tale da rendere Σ rivelabile

Test PBH: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$

$$PBH(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow h_1 \\ \leftarrow h_2 \end{matrix}$$

Matrici $PBH(\lambda_1), PBH(\lambda_2)$ hanno rango 3 se considero solo h_2

$\Downarrow$

Σ è rivelabile usando la sola uscita 2

$\Downarrow$

numero min. di uscite è 1

$$PBH(\lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow h_1 \\ \leftarrow h_2 \end{matrix}$$

3) Stimatore t.c. errore di stima:

- modi convergenti
- modi $\left(\frac{1}{4}\right)^t$, $t\left(\frac{1}{4}\right)^t$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Autovalori di $F+LH$: $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4},\ \nu_1 = 3,\ g_1 \leq 2 \\ \lambda_1 = \frac{1}{4},\ \nu_1 = 2,\ g_1 = 1,\ \lambda_2 = \alpha,\ \nu_2 = g_2 = 1,\ |\alpha| < 1 \end{cases}$

polinomio desiderato: $p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 \lambda \quad (\alpha = 0)$

$$= \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}\right)\lambda = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda$$

Σ osservabile da una singola uscita?

$\Sigma^{(2)} = (F, h_2)$ osservabile?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_2 F \\ h_2 F^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank } \mathcal{O} = 3 \implies \Sigma^{(2)} \text{ osservabile}$$

L^* t.c. $\Delta_{F+L^* h_2}(\lambda) = p(\lambda)$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F+Lh_2}(\lambda) = \det(\lambda I - F - L h_2) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -l_1 & 0 \\ -1 & \lambda+1-l_2 & -2 \\ 0 & -l_3 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda+1-l_2) - l_1\lambda - 2 l_3(\lambda-1)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + (\cancel{-1}+\cancel{1}-l_2)\lambda + (l_2-1)\right) - l_1\lambda - 2 l_3 \lambda + 2 l_3$$

$$= \lambda^3 + (-l_2)\lambda^2 + (l_2 - 1 - l_1 - 2 l_3)\lambda + 2 l_3 \overset{!}{=} \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda$$

$$\begin{cases} -l_2 = -\frac{1}{2} \\ l_2 - 1 - l_1 - 2 l_3 = \frac{1}{16} \\ 2 l_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_2 = 1/2 \\ l_1 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \longrightarrow l_1 = -\frac{9}{16} \\ l_3 = 0 \end{cases} \quad L^* = \begin{bmatrix} -9/16 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F + L^* h_2 = \begin{bmatrix} 1 & -9/16 & 0 \\ 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{autovalori: } \lambda_1 = \frac{1}{4}, \ \nu_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 0, \ \nu_1 = g_1 = 0$$

$$g_1 = 3 - \text{rank}\left(\lambda_1 I - F - L^* h_2\right) = 3 - \underbrace{\text{rank}\begin{bmatrix} -3/4 & 9/16 & 0 \\ -1 & 3/4 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}}_{2} = 1$$

N.B.: Σ è osservabile da 1 uscita allora gli autovalori di $F + LH$ per ogni scelta di L avranno sempre molt. geometrica pari a 1

Guadagno dello stimatore richiesto: $L = \begin{bmatrix} 0 & -9/16 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$