

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)  
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

 noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in  
spazio di stato

soluzioni e  
analisi modale

equilibri e  
linearizzazione

raggiungibilità  
e controllabilità

stabilità

retroazione  
dallo stato

osservabilità e  
ricostruibilità

stimatori  
dello stato

sintesi del  
regolatore



# In questa lezione

- ▷ Informazioni sulla prova scritta
- ▷ Simulazione di prova scritta

# Prova scritta

Esame in modalità telematica

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021  
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 7/7/2021

**Istruzioni.** Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2h.

**Esercizio 1 [4 pt].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Determinare la forma di Jordan di  $F$ , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Fissato**  $\alpha = 0$ , determinare, se possibile, una sequenza di ingresso  $\{u(0), u(1)\}$  tale da portare il sistema dallo stato  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  allo stato  $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ .
- Indicare, se possibile, una condizione iniziale  $x(0)$  dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 2 [4 pt].** Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

- Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di  $u(t) = \bar{u}$ ,  $\bar{u} \in \mathbb{R}$ .
- Fissato**  $\bar{u} = 0$ , studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1, utilizzando il teorema di linearizzazione.
- Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo  $u(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$ , si determinino, se possibile, dei valori di  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

**Esercizio 3 [4 pt].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t+1) &= Hx(t) \end{aligned} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Determinare lo spazio raggiungibile  $X_R$  e lo spazio non osservabile  $X_{NO}$  del sistema.
- Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
- Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari  $\left(\frac{1}{2}\right)^t$  e  $t\left(\frac{1}{2}\right)^t$ .

- Modalità telematica (Zoom + Moodle esami)
- Durata 2 ore
- 3 esercizi sugli argomenti del corso
- 4 punti per esercizio (totale 12 punti)

# Prova scritta: istruzioni base

**Istruzioni.** *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.*

- No appunti, libri, formulari
- Sì calcolatrici (non programmabili)
- Si consegna solo la bella copia
- Chiarezza e ordine nello svolgimento!

# Prova scritta: struttura degli esercizi

**Esercizio 1 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di  $F$ , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. **Fissato**  $\alpha = 0$ , determinare, se possibile, una sequenza di ingresso  $\{u(0), u(1)\}$  tale da portare il sistema dallo stato  $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$  allo stato  $x(2) = [1 \ 0 \ -1]^\top$ .
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale  $x(0)$  dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Ogni esercizio è diviso in 3 parti (ordine di difficoltà tipicamente crescente)

# In questa lezione

- ▷ Informazioni sulla prova scritta
- ▷ Simulazione di prova scritta

# Esercizio 1

**Esercizio 1 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di  $F$ , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
2. **Fissato  $\alpha = 0$** , determinare, se possibile, una sequenza di ingresso  $\{u(0), u(1)\}$  tale da portare il sistema dallo stato  $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^\top$  allo stato  $x(2) = [1 \ 0 \ -1]^\top$ .
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale  $x(0)$  dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

note

# Esercizio 1: soluzione

$$1. F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha \neq -1 & \text{Modi: } \alpha \neq -1: (\pm\alpha)^t \text{ (conv. se } |\alpha| < 1, \\ & & \text{lim. se } \alpha = 1, \text{ div. altrimenti) e } (-1)^t \text{ (lim.)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha = -1 & \text{Modi: } \alpha \neq -1: 1 \text{ (lim.), } (-1)^t \text{ (lim.), } t(-1)^t \text{ (div.)} \end{cases}$$

2. L'ingresso esiste ed è dato da  $u(0) = -2$ ,  $u(1) = 1$ .

$$3. x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}^\top, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0.$$

## Esercizio 2

**Esercizio 2 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t)$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di  $u(t) = \bar{u}$ ,  $\bar{u} \in \mathbb{R}$ .
2. **Fissato  $\bar{u} = 0$** , studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo  $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ , si determinino, se possibile, dei valori di  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

## Esercizio 2: soluzione

1. Nessun equilibrio per  $\bar{u} < 0$ ;

Un unico equilibrio  $\bar{x} = (0, 0)$  per  $\bar{u} = 0$ ;

Due equilibri  $(\pm\sqrt{-\bar{u}/2}, -\bar{u}/2)$  per  $\bar{u} > 0$ .

2.  $\bar{x} = (0, 0)$  equilibrio instabile.

3.  $\bar{x} = (0, 0)$  asintoticamente stabile per  $k_1 < 0$  e  $k_2 < -1$ .

# Esercizio 3

**Esercizio 3 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile  $X_R$  e lo spazio non osservabile  $X_{NO}$  del sistema.
2. Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari  $(\frac{1}{4})^t$  e  $t(\frac{1}{4})^t$ .

## Esercizio 3: soluzione

1.  $X_R = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, X_{NO} = \{0\}.$

2. Il sistema è stabilizzabile con 2 ingressi e rivelabile con 1 uscita (la seconda).

3. Lo stimatore con guadagno  $L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  soddisfa i requisiti.

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ [baggio@dei.unipd.it](mailto:baggio@dei.unipd.it)

🌐 [baggiogi.github.io](https://github.com/baggiogi)

## Esercizio 1

Esercizio 1 [4 pts]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Determinare la forma di Jordan di  $F$ , i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Fissato  $\alpha = 0$ , determinare, se possibile, una sequenza di ingresso  $\{u(0), u(1)\}$  tale da portare il sistema dallo stato  $x(0) = [0 \ 0 \ 1]^T$  allo stato  $x(2) = [1 \ 0 \ -1]^T$ .
- Indicare, se possibile, una condizione iniziale  $x(0)$  dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

G. Baggio

Lez. 23. Esercizi in preparazione all'esame

14 Aprile 2021

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}$$

1) Forma di Jordan di  $F$ , modi elementari e carattere

i) Calcolo autovalori di  $F$ :

$$\lambda(F) = \lambda(F_{11}) \cup \lambda(F_{22})$$

$$\lambda(F_{11}): \Delta_{F_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{11}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -\alpha \\ -\alpha & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \alpha^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha$$

$$\lambda(F) = \{ \pm \alpha, -1 \}$$

Caso  $\alpha = \pm 1$ :  $\lambda_1 = -1, \nu_1 = 2, \lambda_2 = 1, \nu_2 = 1, g_2 = 1$

Caso  $\alpha \neq \pm 1$ :  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = +\alpha, \lambda_3 = -\alpha, \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1, g_1 = g_2 = g_3 = 1$

ii) Calcolo molteplicità geometriche

Caso  $\alpha = -1$ :

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Caso  $\alpha = +1$ :

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

iii) Calcolo di  $F_J$ :

modi elementari:

$$F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} & \alpha = -1 \\ \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & -\alpha & \\ & & -1 \end{bmatrix} & \alpha \neq -1 \end{cases}$$

$$(-1)^t \rightarrow \text{limitato}$$

$$t(-1)^t \rightarrow \text{divergente}$$

$$1 \rightarrow \text{limitato}$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha^t \\ (-\alpha)^t \\ (-1)^t \end{matrix} \right\} \begin{matrix} |\alpha| < 1 & \text{convergenti} \\ \alpha = 1 & \text{limitati} \\ |\alpha| > 1 & \text{divergenti} \end{matrix}$$

Caso  $\alpha = 0$ :  $\lambda_1 = 0$ ,  $\nu_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\nu_2 = 1$

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

2)  $\alpha = 0$ :  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ , calcolo  $u$ ?

i) Esistenza di  $u$ .  $u_2 = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = F^2 x(0) + R_2 u_2$$

$$\underbrace{x(2) - F^2 x(0)} \in \text{im } R_2 = X_R(2) = \text{im} [G \ FG] = \text{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \in X_R(2) \Rightarrow \text{ingresso richiesto esiste}$$

ii) Calcolo  $u_2$

$$x(2) - F^2 x(0) = R_2 u_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad \begin{cases} u(1) = 1 \\ u(0) = -2 \end{cases}$$

3)  $x(0)$  t.c. evoluzione libera di  $x(t)$  sia puramente oscillatoria  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

$$x(t) = F^t x(0) = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{12} & F_{22} \end{bmatrix}^t x(0)$$

↓  
-1

$$= \begin{bmatrix} F_{11}^t & 0 \\ * & F_{22}^t \end{bmatrix} x(0)$$

↓  
 $(-1)^t$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0 \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma (-1)^t \end{bmatrix} = (-1)^t v \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \end{matrix}$$

La condizione iniziale richiesta esiste ed è  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \neq 0$

Esercizio 2 (4 pts). Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

- Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di  $u(t) = \bar{u}$ ,  $\bar{u} \in \mathbb{R}$ .
- Fissato  $\bar{u} = 0$ , studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1, utilizzando il teorema di linearizzazione.
- Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo  $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ , si determinino, se possibile, dei valori di  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 = f_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + u = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

1)  $u(t) = \bar{u} = \text{cost.} \quad \forall t$ . Trovare gli equilibri.

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \text{ eq.} \iff \begin{cases} 0 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 \\ 0 = -\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 + \bar{u} \end{cases} \begin{cases} \bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 \longrightarrow \bar{x}_2 = -\frac{\bar{u}}{2} \\ 2\bar{x}_1^2 = \bar{u} \longrightarrow \bar{x}_1^2 = \frac{\bar{u}}{2} \end{cases}$$

Caso  $\bar{u} > 0$ :  $\bar{x}_1 = \pm \sqrt{\frac{\bar{u}}{2}}$ ,  $\bar{x}_2 = -\frac{\bar{u}}{2}$

Due equilibri:  $\left( \pm \sqrt{\frac{\bar{u}}{2}}, -\frac{\bar{u}}{2} \right)$

Caso  $\bar{u} = 0$ :  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$

Un equilibrio:  $(0, 0)$

Caso  $\bar{u} < 0$ :  $\nexists$  equilibri

2)  $\bar{u} = 0$ , stabilità  $\bar{x} = (0, 0)$  utilizzando la linearizzazione

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 1 \\ -2\bar{x}_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalori di  $J_f(\bar{x})$ :  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1 \implies \text{Re}[\lambda_2] > 0 \implies \bar{x}$  instabile per il thm di linearizzazione

$$3) u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$k_1, k_2$  t.c.  $\bar{x} = (0, 0)$  e' asint. stabile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 = f_{k,1}(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 = f_{k,2}(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$J_{f_k}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,k}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,k}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_{2,k}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2,k}}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 1 \\ -2\bar{x}_1 + k_1 & 1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & 1 + k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{J_{f_k}(\bar{x})}(\lambda) &= \det(\lambda I - J_{f_k}(\bar{x})) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -k_1 & \lambda - 1 - k_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - 1 - k_2) - k_1 \\ &= \lambda^2 + (-1 - k_2)\lambda - k_1 \end{aligned}$$

Regola di Cartesio:  $p(\lambda) = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0$ ,  $p_1, p_0 \in \mathbb{R}$

$p(\lambda)$  ha radici con parte reale strett. neg. se e solo se  $p_1, p_0 > 0$

$J_{f_k}(\bar{x})$  ha autovalori con parte reale strett. neg. se e solo se

$$\begin{cases} -1 - k_2 > 0 \\ -k_1 > 0 \end{cases} \begin{cases} k_2 < -1 \\ k_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{per } k_1 < 0, k_2 < -1 \quad \bar{x} = (0, 0) \text{ e' asint. stabile.}$$

### Esercizio 3

Esercizio 3 [4 pt]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gv(t) & F &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & G &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \\ y(t+1) &= Hx(t) \end{aligned}$$

- Determinare lo spazio raggiungibile  $X_R$  e lo spazio non osservabile  $X_{NO}$  del sistema.
- Dire se il sistema è (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero minimo di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero minimo di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
- Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari  $(\frac{1}{2})^t$  e  $t(\frac{1}{2})^t$ .

G. Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

14 Aprile 2021

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow h_1 \\ \leftarrow h_2 \end{matrix}$$

$$g_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, g_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1)  $X_R, X_{NO}$ ?

$$X_R = \text{im } R = \text{im } [G \quad FG \quad F^2G]$$

$$X_{NO} = \text{ker } O = \text{ker } \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix}$$

$(F, G)$  in forma di Kalman?  $(F_{11}, G_1)$  è raggi.?

$$R^{(1)} = [G_1 \quad F_{11}G_1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \dots \quad \text{rank } R^{(1)} = 2 \Rightarrow (F_{11}, G_1) \text{ è raggi.}$$

$$R = \begin{bmatrix} R^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (F, G)$  in forma di Kalman

$$\text{im } R = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = X_R$$

$\rightarrow \text{rank } O = 3 \rightarrow \Sigma \text{ oss}$   
 $\rightarrow X_{NO} = \{0\}$

$$X_{NO} = \text{ker } O = \text{ker } \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \text{ker } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ \vdots & & \end{bmatrix} = \{0\}$$

$(\Sigma \text{ osservabile ma non raggi.})$

2)  $-\Sigma = (F, G, H)$  stabilizzabile, rivelabile?

$$X_{no} = \{0\} \Rightarrow \Sigma \text{ osservabile} \Rightarrow \Sigma \text{ rivelabile}$$

l'unico autovalore non ragg. di  $\Sigma$  è  $0 \Rightarrow \Sigma$  stabilizzabile

- Numero min. di ingressi (colonne di  $G$ ) tale da rendere  $\Sigma$  stabilizz.?

$\Sigma_1 = (F, g_1)$ ,  $\Sigma_1$  è in forma di Kalman?  $(F_{11}, g_{11})$  è ragg.?

$$R_{11} = [g_{11} \quad F_{11}g_{11}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rank } R_{11} = 1 \Rightarrow (F_{11}, g_{11}) \text{ non è ragg.}$$

$\Rightarrow \Sigma_1$  ha un autovalore non ragg. in  $1 \text{ o } -1$

$\Rightarrow \Sigma_1$  non è stabilizz.

$\Sigma_2 = (F, g_2)$ ,  $\Sigma_2$  è in forma di Kalman?  $(F_{11}, g_{21})$  è ragg.?

$$R_{21} = [g_{21} \quad F_{11}g_{21}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{rank } R_{21} = 1 \Rightarrow (F_{11}, g_{21}) \text{ non è ragg.}$$

$\Rightarrow \Sigma_2$  non è stabilizz.

$\Rightarrow$  numero min. di ingressi è 2

- Numero minimo di uscite (righe di  $H$ ) tale da rendere  $\Sigma$  rivelabile

Test PBH:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$

$$PBH(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow h_1 \\ \leftarrow h_2 \end{matrix}$$

Matrici  $PBH(\lambda_1), PBH(\lambda_2)$  hanno rango 3 se considerare solo  $h_2$



$$PBH(\lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow h_1 \\ \leftarrow h_2 \end{matrix}$$

$\Sigma$  è rivelabile usando la sola uscita 2



numero min. di uscite è 1

3) Stimatore t.c. errore di stima:

- modi convergenti
- modi  $(\frac{1}{4})^t, t(\frac{1}{4})^t$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Autovalori di } F+LH: \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4}, \nu_1 = 3, g_1 \leq 2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{4}, \nu_2 = 2, g_2 = 1, \lambda_3 = \alpha, \nu_3 = g_3 = 1, |\alpha| < 1 \end{cases}$$

$$\text{polinomio desiderato: } p(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)^2 \lambda \quad (\alpha = 0)$$

$$= \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{16}\right) \lambda = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda$$

$\Sigma$  osservabile da una singola uscita?

$\Sigma^{(2)} = (F, h_2)$  osservabile?

$$O = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_2 F \\ h_2 F^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{rank } O = 3 \Rightarrow \Sigma^{(2)} \text{ osservabile}$$

$$L^* \text{ t.c. } \Delta_{F+L^*h_2}(\lambda) = p(\lambda)$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F+Lh_2}(\lambda) = \det(\lambda I - F - Lh_2) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -l_1 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 - l_2 & -2 \\ 0 & -l_3 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1 - l_2) - l_1\lambda - 2l_3(\lambda - 1)$$

$$= \lambda(\lambda^2 + (-1 + 1 - l_2)\lambda + (l_2 - 1)) - l_1\lambda - 2l_3\lambda + 2l_3$$

$$= \lambda^3 + (-l_2)\lambda^2 + (l_2 - 1 - l_1 - 2l_3)\lambda + 2l_3 = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda$$

$$\begin{cases} -l_2 = -\frac{1}{2} \\ l_2 - 1 - l_1 - 2l_3 = \frac{1}{16} \\ 2l_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} l_2 = 1/2 \\ l_1 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} \rightarrow l_1 = -\frac{9}{16} \\ l_3 = 0 \end{cases} \quad L^* = \begin{bmatrix} -9/16 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F + L^*h_2 = \begin{bmatrix} 1 & -9/16 & 0 \\ 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{autovalori: } \lambda_1 = \frac{1}{4}, \nu_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 0, \nu_1 = \nu_2 = 0$$

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F - L^* h_2) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} -3/4 & 9/16 & 0 \\ -1 & 3/4 & 2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} = 1$$

2

N.B.:  $\Sigma$  è osservabile da 1 uscita allora gli autovalori di  $F + LH$  per ogni scelta di  $L$  avranno sempre mult. geometrica pari a 1

Guadagno dello stimatore richiesto:  $L = \begin{bmatrix} 0 & -9/16 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$