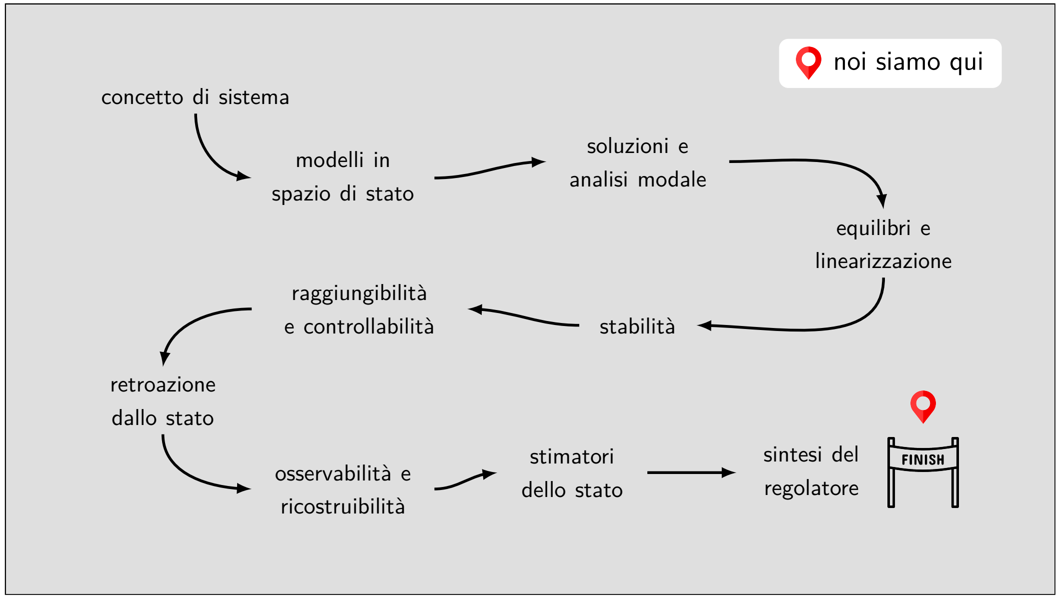
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 23: Esercizi in preparazione all'esame

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



## In questa lezione

- ▷ Informazioni sulla prova scritta
- ▷ Simulazione di prova scritta

## Prova scritta

⚠ **Esame in modalità telematica** ⚠

**Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021**
**Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)**

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del ??/??/2021

**Istruzioni.** *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.*

**Esercizio 1 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di $F$, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ allo stato $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 2 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$**, studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, si determinino, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.

**Esercizio 3 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t+1) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile $X_R$ e lo spazio non osservabile $X_{NO}$ del sistema.
2. Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari $\left(\frac{1}{4}\right)^t$ e $t\left(\frac{1}{4}\right)^t$.

- Modalità telematica (Zoom + Moodle esami)
- Durata 2 ore
- 3 esercizi sugli argomenti del corso
- 4 punti per esercizio (totale 12 punti)

## Prova scritta: istruzioni base

**Istruzioni.** *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.*

- No appunti, libri, formulari
- Sì calcolatrici (non programmabili)
- Si consegna solo la bella copia
- Chiarezza e ordine nello svolgimento!



## Prova scritta: struttura degli esercizi

**Esercizio 1 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di $F$, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ allo stato $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Ogni esercizio è diviso in 3 parti (ordine di difficoltà tipicamente crescente)

## Esercizio 1

**Esercizio 1 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di $F$, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, determinare, se possibile, una sequenza di ingresso $\{u(0), u(1)\}$ tale da portare il sistema dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ allo stato $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top$.
3. Indicare, se possibile, una condizione iniziale $x(0)$ dello stato del sistema tale per cui l'evoluzione dello stato del sistema sia puramente oscillatoria per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.



## Esercizio 1: soluzione

1. $F_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha \neq -1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha = -1 \end{cases}$

   Modi: $\alpha \neq -1$: $(\pm\alpha)^t$ (conv. se $|\alpha| < 1$, lim. se $\alpha = 1$, div. altrimenti) e $(-1)^t$ (lim.)

   Modi: $\alpha \neq -1$: 1 (lim), $(-1)^t$ (lim.) e $t(-1)^t$ (div.)

2. L'ingresso esiste ed è dato da $u(0) = -1$, $u(1) = 0$.

3. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}^\top$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$.

# Esercizio 2

**Esercizio 2 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t)$$

1. Assumendo l'ingresso costante, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $u(t) = \bar{u}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$**, studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla legge di controllo $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, si determinino, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ in modo che l'origine del sistema sia asintoticamente stabile.



# Esercizio 2: soluzione

1. Nessun equilibrio per $\bar{u} > 0$;
   Un unico equilibrio $\bar{x} = (0, 0)$ per $\bar{u} = 0$;
   Due equilibri $(\pm\sqrt{-\bar{u}/2}, -\bar{u}/2)$ per $\bar{u} < 0$.
2. $\bar{x} = (0, 0)$ equilibrio instabile.
3. $\bar{x} = (0, 0)$ asintoticamente stabile per $k_1 < 0$ e $k_2 < -1$.

## Esercizio 3

**Esercizio 3 [4 pti].** Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t+1) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare lo spazio raggiungibile $X_R$ e lo spazio non osservabile $X_{NO}$ del sistema.
2. Dire se il sistema è: (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile. Indicare inoltre (i) il numero **minimo** di ingressi tale da rendere il sistema stabilizzabile e (ii) il numero **minimo** di uscite tale da rendere il sistema rivelabile.
3. Determinare, se possibile, uno stimatore ad anello chiuso dello stato tale per cui la dinamica dell'errore di stima converga a zero asintoticamente e contenga tra i modi elementari $\left(\frac{1}{4}\right)^t$ e $t\left(\frac{1}{4}\right)^t$.



## Esercizio 3: soluzione

1. $X_R = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $X_{NO} = \{0\}$.
2. Il sistema è stabilizzabile con 2 ingressi e rivelabile con 1 uscita (la seconda).
3. Lo stimatore con guadagno $L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ soddisfa i requisiti.