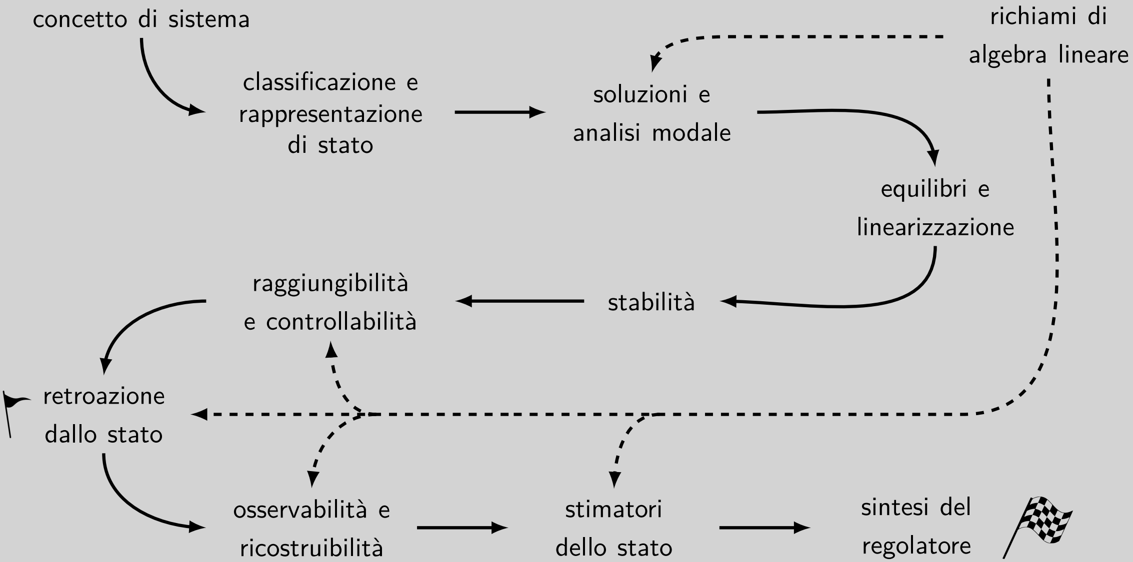
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

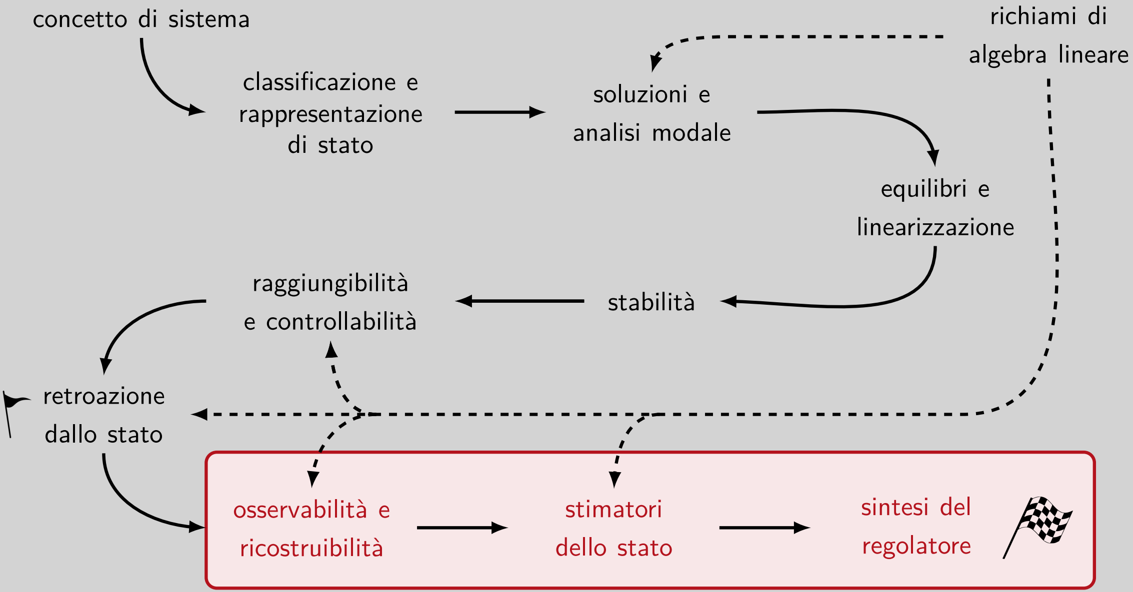
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 22: Esercizi di ricapitolazione su osservabilità/ricostruibilità, stimatori e sintesi del regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
richiami di algebra lineare
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore

Parte III(b)

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: osservabilità/ricostruibilità e stimatori
- Esercizio 2: calcolo dello stato iniziale e stimatori
- Esercizio 3: stimatori e sintesi del regolatore
- Quiz time !

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: osservabilità/ricostruibilità e stimatori
- Esercizio 2: calcolo dello stato iniziale e stimatori
- Esercizio 3: stimatori e sintesi del regolatore
- Quiz time !

Esercizio 1 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 7 Settembre 2015]

extra

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Osservabilità e ricostruibilità?

2. Stimatore dead-beat con errore di stima che va a zero nel numero minimo di passi?

Esercizio 1: soluzione

1. Sistema osservabile ma ricostruibile.

2. Guadagno dello stimatore dead-beat $L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: osservabilità/ricostruibilità e stimatori
- Esercizio 2: calcolo dello stato iniziale e stimatori
- Esercizio 3: stimatori e sintesi del regolatore
- Quiz time !

Esercizio 2 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 20 Gennaio 2017]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Insieme di stati iniziali compatibili con le misure

$$u(0) = u(1) = 1, \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, y(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, y(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ?$$

2. Stimatore dead-beat usando la seconda uscita?

Esercizio 2: soluzione

1. $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Guadagno dello stimatore dead-beat $L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: osservabilità/ricostruibilità e stimatori
- ▷ Esercizio 2: calcolo dello stato iniziale e stimatori
- ▷ Esercizio 3: stimatori e sintesi del regolatore
- ▷ Quiz time !

Esercizio 3 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 30 Gennaio 2015]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Per quali uscite y_1, y_2, y_3 esiste uno stimatore dead-beat?
2. Stimatore asintotico dello stato usando la sola uscita y_3?
3. Regolatore dead-beat usando la sola uscita y_1?

Esercizio 3: soluzione

1. Esiste uno stimatore dead-beat solo per y_1 e y_2.

2. Non esiste uno stimatore asintotico dello stato usando la sola uscita y_3.

3. Matrice di retroazione: $K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Guadagno dello stimatore: $L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

In questa lezione: esercizi!

- Esercizio 1: osservabilità/ricostruibilità e stimatori
- Esercizio 2: calcolo dello stato iniziale e stimatori
- Esercizio 3: stimatori e sintesi del regolatore
- Quiz time !

`www.kahoot.it`

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 22: Esercizi di ricapitolazione su osservabilità/ricostruibilità, stimatori e sintesi del regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esercizio 1 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 7 Settembre 2015]

extra

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Osservabilità e ricostruibilità?
2. Stimatore dead-beat con errore di stima che va a zero nel numero minimo di passi?

back

$$x(t+1) = F x(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = H x(t) \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1)

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad F_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_{22} = 0$$

$$H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad H = [\underbrace{1 \;\; 1}_{H_1} \,|\, \underbrace{0}_{H_2}]$$

(F_{11}, H_1) è osservabile?

$$O_{11} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 F_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det O_{11} = 1 \neq 0 \Rightarrow (F_{11}, H_1)$ è oss.

$\Rightarrow (F, H)$ è in forma di

(F_{22}, H_2) è non osservabile

$\Rightarrow$ $\lambda = 0$ è l'unico autovalore non osservabile

Σ è non osservabile ma è ricostruibile (perché tutti gli autovalori non osservabili sono nulli)

2) Σ è ricostruibile $\Rightarrow$ $\exists$ uno stimatore dead-beat

$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$ $\qquad \Delta_{F+LH}(\lambda) \overset{!}{=} \lambda^3$

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_2 & 0 \\ \ell_3 & \ell_3 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda-1-\ell_1 & -1-\ell_1 & 0 \\ -\ell_2 & \lambda-1-\ell_2 & 0 \\ -1-\ell_3 & -\ell_3 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\left((\lambda-1-\ell_1)(\lambda-1-\ell_2) - \ell_2(1+\ell_1)\right)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 - (1+\ell_1+1+\ell_2)\lambda + 1 + \ell_1 + \cancel{\ell_2} + \cancel{\ell_1\ell_2}\right.$$

$$\left. - \cancel{\ell_1\ell_2} - \cancel{\ell_2}\right)$$

$$= \lambda^3 - (2 + l_1 + l_2)\lambda^2 + (1 + l_1)\lambda$$

$$\begin{cases} 2 + l_1 + l_2 = 0 \\ 1 + l_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2 = -1 \\ l_1 = -1 \end{cases} \qquad L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ l_3 \end{bmatrix} \qquad l_3 \in \mathbb{R}$$

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 + l_3 & l_3 & 0 \end{bmatrix} \qquad (F + LH)_J = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$l_3 = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(F + LH) = 1$$

$$\Rightarrow (F + LH)_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ errore di stima va a zero in 2 passi

Esercizio 2 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 20 Gennaio 2017]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Insieme di stati iniziali compatibili con le misure

$$u(0) = u(1) = 1, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, y(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, y(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ?$$

2. Stimatore dead-beat usando la seconda uscita?

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t), \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) $u(0) = u(1) = 1 \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; y(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; y(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Σ è osservabile?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } \mathcal{O} = 3 \Rightarrow \Sigma \text{ osservabile}$$

$\Rightarrow \exists$ un unico $x(0)$

$$x(0) = (O^T O)^{-1} O^T \begin{bmatrix} y_l(0) \\ y_l(1) \\ y_l(2) \end{bmatrix}$$

$$y_l(0) = y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_l(1) = y(1) - y_f(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - HGu(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_l(2) = y(2) - y_f(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \underbrace{HGu(1)} - \cancel{H\underbrace{FG}u(0)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = \left(\mathcal{O}^T \mathcal{O}\right)^{-1} \mathcal{O}^T \begin{bmatrix} y_\ell(0) \\ y_\ell(1) \\ y_\ell(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & " & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} " \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

back

2) Stimatore dead-beat dalla seconda uscita.

$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\exists$ stimatore dead-beat?

$$F = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalori F: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$

Test PBH di osservabilità:

$$\begin{bmatrix} H \\ zI - F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ z & -1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & -1 & z+1 \end{bmatrix} \overset{z=\lambda_2=-1}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank} \begin{bmatrix} H \\ -I-F \end{bmatrix} = 3$$

(pieno)

$\Rightarrow \Sigma$ ricostruibile

$\Rightarrow \exists$ uno stimatore dead-beat

Calcolo stimatore dead-beat:

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \qquad \Delta_{F+LH}(\lambda) \overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \det \left[\begin{array}{c|cc} \lambda & -1 & -l_1 \\ \hline 0 & \lambda & -l_2 \\ 0 & -1 & \lambda+1-l_3 \end{array}\right]$$

back

$$= \lambda\left(\lambda(\lambda+1-l_3) - l_2\right)$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + \lambda(1-l_3) - l_2\right)$$

$$= \lambda^3 + \lambda^2(1-l_3) - \lambda l_2$$

$$\begin{cases} 1 - l_3 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_3 = 1 \\ l_2 = 0 \end{cases} \qquad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad l_1 \in \mathbb{R}$$

(come scegliere l_1 di modo che l'errore di stima vada a zero nel num. min. di passi?)

Esercizio 3 [riadattato da Es. 3 tema d'esame 30 Gennaio 2015]

extra

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = Hx(t), \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Per quali uscite y_1, y_2, y_3 esiste uno stimatore dead-beat?
2. Stimatore asintotico dello stato usando la sola uscita y_3?
3. Regolatore dead-beat usando la sola uscita y_1?

back

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Hx(t)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

1) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Autovalori di F: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$

Test PBH:

- (F, h_1): $\begin{bmatrix} h_1 \\ zI - F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z+1 & 0 \\ -1 & 0 & z \end{bmatrix}$

$z=1$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ rango pieno

$z=-1$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ rango pieno

back

(F, h_1) è ricostruibile $\Rightarrow$ $\exists$ uno stimatore dead-beat da y_1

- (F, h_2) :

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ zI - F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z+1 & 0 \\ -1 & 0 & z \end{bmatrix} \xrightarrow{z=1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ rango pieno}$$

$$\xrightarrow{z=-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ rango pieno}$$

(F, h_2) è ricostruibile $\Rightarrow$ $\exists$ uno stimatore dead-beat da y_2

- (F, h_3) :

$$\begin{bmatrix} h_3 \\ zI - F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ z-1 & 0 & 0 \\ 0 & z+1 & 0 \\ -1 & 0 & z \end{bmatrix} \xrightarrow{z=1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ rango non pieno}$$

back

(F, h_3) è non ricostruibile $\Rightarrow \nexists$ uno stimatore dead-beat da y_3

2) (F, h_3) non è rivelabile $\Rightarrow \nexists$ uno stimatore asintotico dello stato da y_3

3) Regolatore dead-beat da y_1.

Esistenza regolatore dead-beat.

- Esistenza di un DBC
- Esistenza di uno stimatore dead-beat ✓

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalori di F: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$

Test PBH di raggiungibilità:

$$[zI - F \quad G] = \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & z+1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{z=1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ rango pieno}$$

$$\xrightarrow{z=-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ rango pieno}$$

(F, G) è controllabile $\Rightarrow \exists$ un DBC

$\Rightarrow \exists$ un regolatore dead-beat

Calcolo del DBC

$\Delta_{F+GK}(\lambda) \overset{!}{=} \lambda^3 \qquad K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK) = \det \begin{bmatrix} \lambda-1-k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -k_1 & \lambda+1-k_2 & -k_3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1-k_1)(\lambda+1-k_2) + k_2 k_3 + k_3(\lambda+1-k_2) - k_1 k_2 \lambda$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2(k_1+k_2) + \lambda(-1-k_1+k_2+k_3) + k_3$$

$$\begin{cases} k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ -1 - k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} '' \\ k_1 = -k_2 \\ k_2 = 1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_3 = 0 \\ k_1 = -1/2 \\ k_2 = 1/2 \end{cases} \qquad K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolo guadagno stimatore dead-beat

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) \overset{!}{=} \lambda^3 \qquad L = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) = \det \left[\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 - \ell_1 & -\ell_1 & 0 \\ -\ell_2 & \lambda + 1 - \ell_2 & 0 \\ \hline -1-\ell_3 & -\ell_3 & \lambda \end{array}\right]$$

back

$$= \lambda\left((\lambda - 1 - l_1)(\lambda + 1 - l_2) - l_1 l_2\right)$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2(l_1 + l_2) + \lambda(-1 + l_2 - l_1)$$

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = 0 \\ -1 + l_2 - l_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 = -1/2 \\ l_2 = 1/2 \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ l_3 \end{bmatrix} \qquad l_3 \in \mathbb{R}$$

(Trovare l_3 tale per cui lo stato complessivo del regolatore va a zero nel num. minimo di passi)