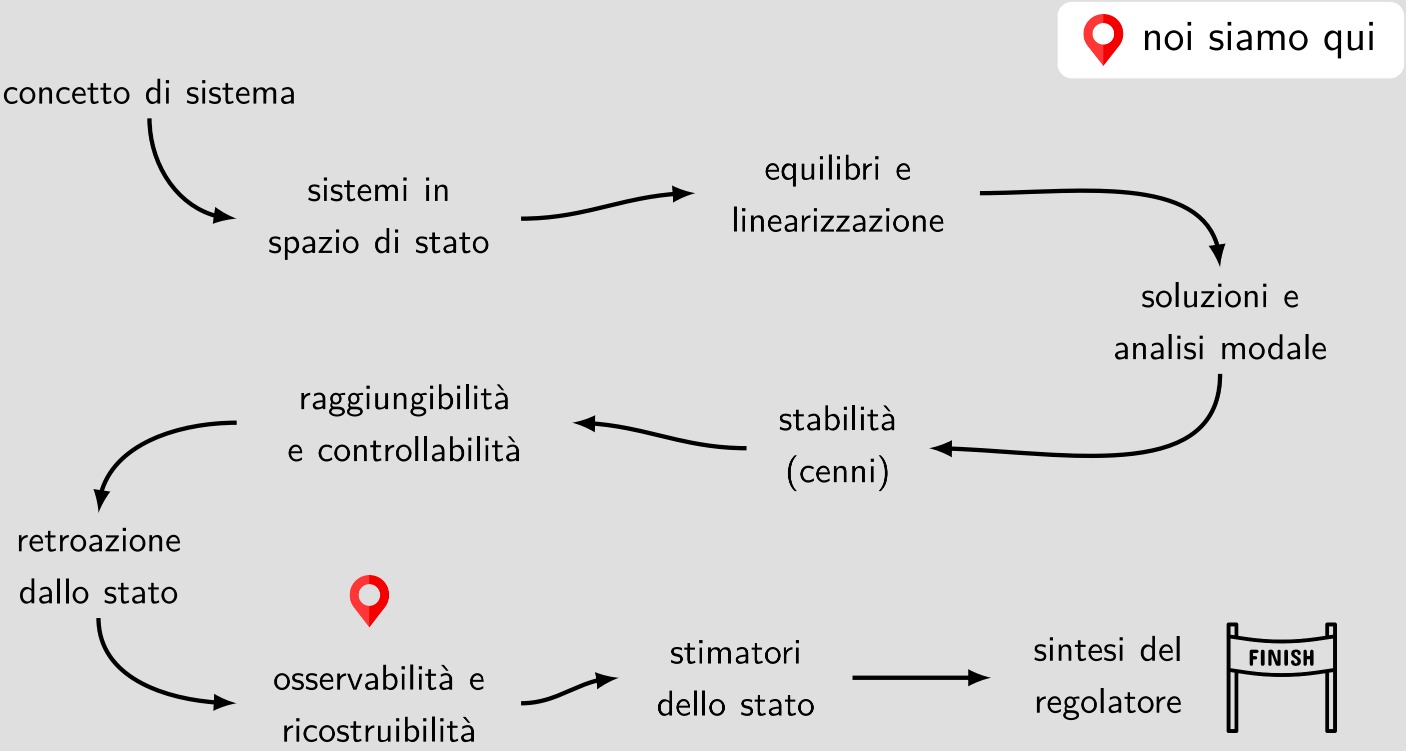
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 22: Osservabilità e ricostruibilità a tempo continuo e dualità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

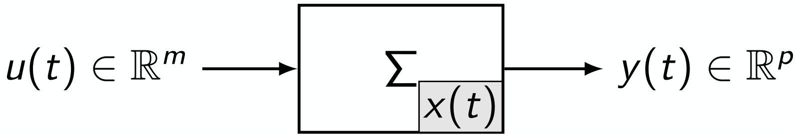
- ▷ Osservabilità e ricostruibilità: definizioni generali
- ▷ Osservabilità di sistemi lineari a t.d. $\longrightarrow$ Σ osservabile $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}\, \overbrace{\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}}^{\mathcal{O}} = n$
- ▷ Ricostruibilità di sistemi lineari a t.d.

In questa lezione

- Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.
- Sistema duale e sue proprietà

Osservabilità e ricostruibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$
$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(\tau) = \underbrace{He^{F\tau}x_0}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\int_0^t He^{F(t-s)}Gu(s)ds}_{\text{evoluzione forzata}}, \ \tau \in [0, t]$$

Osservabilità e ricostruibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

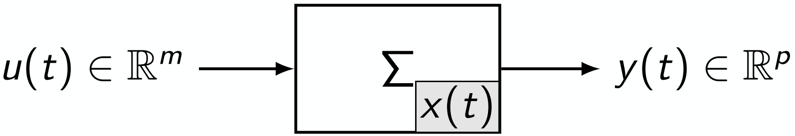
$$u(t) \in \mathbb{R}^m \longrightarrow \boxed{\Sigma \quad \boxed{x(t)}} \longrightarrow y(t) \in \mathbb{R}^p$$

$$y(\tau) = He^{F\tau}x_0 + \int_0^t He^{F(t-s)}Gu(s)ds,\ \tau \in [0, t]$$

Quando possiamo determinare univocamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Osservabilità e ricostruibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(\tau) = He^{F\tau}x_0 + \int_0^t He^{F(t-s)}Gu(s)ds, \ \tau \in [0, t]$$

Quando possiamo determinare univocamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Quando possiamo determinare univocamente $x^* = x(t) \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Criterio di osservabilità del rango

insieme degli stati non osservabili in $[0,t]$

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0,t]$$

$$X_{NO} = (\text{minimo}) \text{ spazio non osservabile}$$

in t

possiamo determinare in maniera univoca x_0

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

Criterio di osservabilità del rango

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$

$$X_{NO} = \text{(minimo) spazio non osservabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema} \qquad (\text{Matlab}^{®}\ \texttt{obsv(sys)})$$

$= X_{NO}$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

Criterio di osservabilità del rango

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$

$$X_{NO} = \text{(minimo) spazio non osservabile}$$

Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

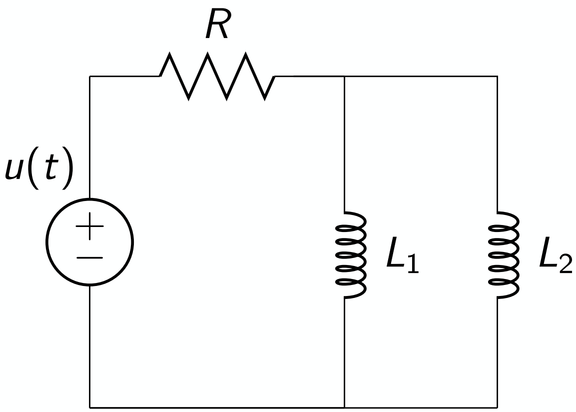
$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema} \qquad (\text{Matlab}^{\circledR}\ \texttt{obsv(sys)})$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \operatorname{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$!!

$X_{NO}(t) = X_{NO}$ per ogni $t > 0$

Esempio

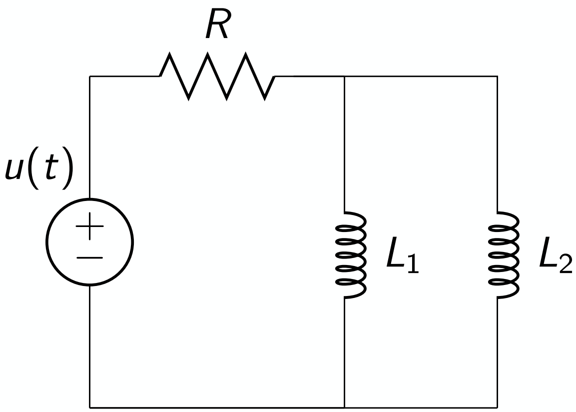


$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

note

Esempio



$$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$$

$$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma \text{ non osservabile}$$

note

Ricostruibilità (a t.c.) $=$ osservabilità (a t.c.)

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

misure $u(\tau),\ y(\tau),\ \tau \in [0, t]$

Ricostruibilità (a t.c.) = osservabilità (a t.c.)

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

misure $u(\tau),\ y(\tau),\ \tau \in [0,t]$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $e^{Ft}x_0 + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$= x^* + \underbrace{e^{Ft}X_{NO}(t)}_{X_{NR}(t) \,=\, \text{spazio non ricostruibile in } [0,t]}$$

<u>Def</u>: Un sistema a t.c. è ricostruibile se $X_{NR}(t) = \{0\}$ per un qualche $t \geq 0$.

Ricostruibilità (a t.c.) = osservabilità (a t.c.)

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$$

misure $u(\tau),\ y(\tau),\ \tau \in [0,t]$

Se $X_{NO}(t) = \{0\}$
$\Rightarrow X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t) = \{0\}$
Se $X_{NR}(t) = \{0\}$
$\Rightarrow X_{NO}(t) = e^{-Ft}X_{NR}(t) = \{0\}$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $e^{Ft}x_0 + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau$
$= x^* + e^{Ft}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t) =$ spazio non ricostruibile nell'intervallo $[0,t]$

e^{Ft} invertibile $\Longrightarrow$ $\boxed{X_{NR}(t) = \{0\} \iff X_{NO}(t) = \{0\}}$

ricostruibilità = osservabilità !!

In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Sistema duale e sue proprietà

Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

N.B. Qui consideriamo sistemi a t.d. ma tutto si applica a t.c.!

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

note

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d : \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} H^\top & F^\top H^\top & \cdots & (F^\top)^{n-1} H^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ FH \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}^\top = \mathcal{O}^\top$$

Σ_d raggiungibile
$\Updownarrow$
Σ osservabile

$$\mathrm{im}((F^\top)^n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{R}_d \iff \ker(F^n) \supseteq \ker \mathcal{O}$$

Σ_d controllabile
$\Updownarrow$
Σ ricostruibile

note

Sistema duale: osservabilità e ricostruibilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^\top \\ G^\top F^\top \\ \vdots \\ G^\top (F^\top)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1}G \end{bmatrix}^\top = \mathcal{R}^\top$$

Σ_d osservabile
$\Updownarrow$
Σ raggiungibile

$$\ker((F^\top)^n) \supseteq \ker \mathcal{O}_d \iff \mathrm{im}(F^n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{R}$$

Σ_d ricostruibile
$\Updownarrow$
Σ controllabile

Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

Σ_d non raggiungibile

$\dim X_{R,d} = K$

$$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \longrightarrow \Sigma_{K,d} = \left(\begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right)$$

Forma di Kalman di raggiungibilità

$F_{11}^\top \in \mathbb{R}^{K \times K}$

$(F_{11}^\top, H_1^\top)$ è raggiungibile

dualità

$\top$ dualità $\top$ $\top$

$$\Sigma = (F, G, H) \longrightarrow \Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & \overbrace{0}^{n-K} \end{bmatrix} \right)$$

Σ non osservabile

$F_{11} \in \mathbb{R}^{K \times K}$

(F_{11}, H_1) è osservabile

Forma di Kalman di osservabilità

$(F_{22}, 0)$ sottosistema non osservabile

note

Dualità: test PBH di raggiungibilità/osservabilità

Test PBH di raggiungibilità

$$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \longrightarrow \Sigma_d \text{ raggiungibile} \iff$$

$$\text{rank}\underbrace{[zI - F^\top \;\; H^\top]}_{} = n, \; \forall z \in \mathbb{C}$$

dualità

dualità

$$\Sigma = (F, G, H) \xrightarrow{\;\;\top\;\;} \Sigma \text{ osservabile} \iff$$

$$\text{rank}\underbrace{\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}}_{} = n, \; \forall z \in \mathbb{C}$$

autovalori di F

Test PBH di osservabilità

Se Σ non è osservabile allora

$\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix}$ cade di rango per qualche autov. di F
e questi autovalori sono gli autovalori "non osservabili"

Dualità: allocazione degli autovalori

$\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \longrightarrow$ Σ_d raggiungibile $\iff$ $\exists\, K \in \mathbb{R}^{p\times n}$: $F^\top + H^\top K$ ha autovalori desiderati

dualità $\updownarrow$ T   dualità

$\Sigma = (F, G, H) \longrightarrow$ Σ osservabile $\iff$ $\exists\, L = K^\top \in \mathbb{R}^{n\times p}$: $F + LH$ ha autovalori desiderati

autovalori di $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ = autovalori di $A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Proprietà equivalenti all'osservabilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è osservabile se e solo se:

1. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.
2. Il sistema duale Σ_d è raggiungibile.
3. $\text{rank}\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}$. (Test PBH di osservabilità)
4. Gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma : \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0.$ (Test PBH di ricostruibilità)
4. Esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0$.
4. Esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

N.B. Parlare di ricostruibilità ha senso solo a t.d.!

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 22: Osservabilità e ricostruibilità a tempo continuo e dualità

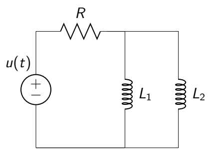
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Esempio



$x_1(t) = i_{L_1}(t),\ x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Sigma = (F, G, H)$ è osservabile?

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_1} - \frac{R}{L_2} \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{O} = \cancel{-\frac{R}{L_1}} \cancel{-\frac{R}{L_2}} + \cancel{\frac{R}{L_1}} + \cancel{\frac{R}{L_2}} = 0 \implies \Sigma \text{ non osservabile}$$

$$X_{NO} = \operatorname{Ker} \mathcal{O}$$

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\Sigma = (F, G, H) \qquad \Sigma_d = (F^T, H^T, G^T)$$

Σ_d raggiungibile $\iff \operatorname{rank} R_d = n$

$$R_d = \left[H^T \;\; H^T F^T \;\; H^T (F^T)^2 \cdots H^T (F^T)^{n-1} \right]$$

$\iff \operatorname{rank} R_d^T = n$

$$R_d^T = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{O}$$

$\iff \operatorname{rank} \mathcal{O} = n \iff \Sigma$ osservabile

---

Def: Dato un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^n$, il complemento ortogonale di V, $V^\perp$, è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ ortogonali ai vettori di V:

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n : w^T v = 0 \quad \forall v \in V \}$$

Lemma 1: Dati due sottospazi di $\mathbb{R}^n$ V, U. Se $V \subseteq U$, $V^\perp \supseteq U^\perp$.

Lemma 2: Sia $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$: $[\operatorname{im} A]^\perp = \operatorname{Ker} A^T$.

Σ_d controllabile $\iff \operatorname{im}(F^T)^n \subseteq \operatorname{im} R_d = X_{R,d}$

Lemma 1 $\iff [\operatorname{im}(F^T)^n]^\perp \supseteq [\operatorname{im} R_d]^\perp$

Lemma 2 $\iff \operatorname{Ker} F^n \supseteq \operatorname{Ker} R_d^T = \operatorname{Ker} \mathcal{O}$ $\quad (R_d^T = \mathcal{O})$

$\iff \Sigma$ ricostruibile

Σ_d osservabile $\iff \operatorname{rank} \mathcal{O}_d = n$

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^T \\ G^T F^T \\ G^T (F^T)^2 \\ \vdots \\ G^T (F^T)^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\iff \operatorname{rank} \mathcal{O}_d^T = n$

$$\mathcal{O}_d^T = [G \;\; FG \;\; F^2G \;\; \cdots \;\; F^{n-1}G] = R$$

$\iff \operatorname{rank} R = n \iff \Sigma$ raggiungibile

Σ_d ricostruibile $\iff \operatorname{Ker}(F^T)^n \supseteq \operatorname{Ker} \mathcal{O}_d = X_{NO,d}$

Lemma 1 $\iff [\operatorname{Ker}(F^T)^n]^\perp \subseteq [\operatorname{Ker} \mathcal{O}_d]^\perp$

Lemma 2 $\iff \operatorname{im} F^n \subseteq \operatorname{im} \mathcal{O}_d^T = \operatorname{im} R = X_R$

$\iff \Sigma$ controllabile

Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

Σ_d non raggiungibile — Forma di Kalman di raggiungibilità

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] & \Sigma_{K,d} = \left(\begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dualità}"] \\
\Sigma = (F, G, H) \arrow[r] & \Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{tikzcd}$$

Σ non osservabile — Forma di Kalman di osservabilità

$(F_{22}, 0)$ sottosistema non osservabile

note

$$\Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$F_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ $\quad$ $H_1 \in \mathbb{R}^{p \times k}$

$$x = \begin{bmatrix} x_o \\ \hline x_{No} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, k \\ \}\, n-k \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_o(t+1) \\ x_{No}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(t) \\ x_{No}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_o(t) \\ x_{No}(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_o(t+1) = F_{11} x_o(t) + G_1 u(t) \\ x_{No}(t+1) = F_{21} x_o(t) + F_{22} x_{No}(t) + G_2 u(t) \\ y(t) = H_1 x_o(t) \end{cases}$$

$\Sigma_o = (F_{11}, G_1, H_1) =$ sottosistema osservabile

$\Sigma_{No} = (F_{22}, G_2, 0) =$ sottosistema non osservabile