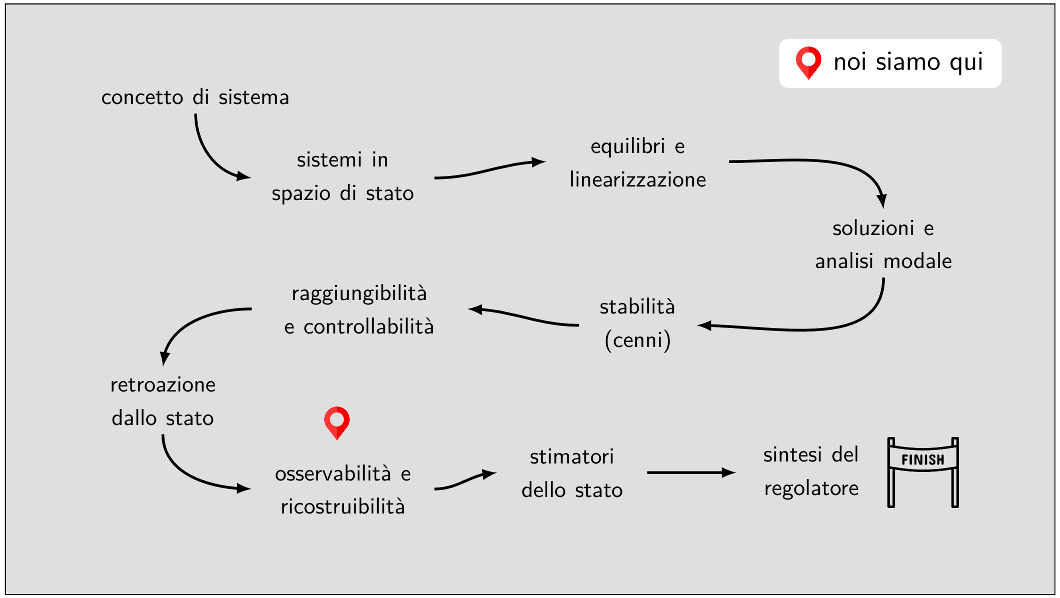
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 22: Osservabilità e ricostruibilità a tempo continuo e dualità

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

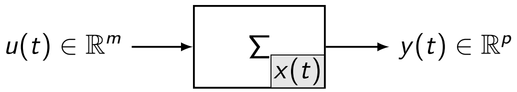


In questa lezione

- ▷ Osservabilità e ricostruibilità di sistemi lineari a t.c.
- ▷ Sistema duale e sue proprietà

Osservabilità e ricostruibilità di sistemi LTI a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$



$$y(\tau) = He^{F\tau}x_0 + \int_0^t He^{F(t-s)}Gu(s)\mathrm{d}s,\ \tau \in [0, t]$$

Quando possiamo determinare univocamente $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Quando possiamo determinare univocamente $x^* = x(t) \in \mathbb{R}^n$ dalle misure?

Criterio di osservabilità del rango

$$X_{NO}(t) = \text{spazio non osservabile nell'intervallo } [0, t]$$
$$X_{NO} = \text{(minimo) spazio non osservabile}$$

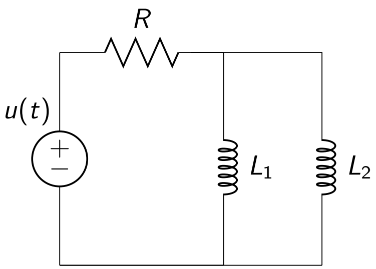
Definizione: Un sistema Σ a t.c. si dice (completamente) osservabile se $X_{NO} = \{0\}$.

$$\mathcal{O} \triangleq \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} = \text{matrice di osservabilità del sistema} \quad (\text{Matlab}^{®}\ \texttt{obsv(sys)})$$

$$\boxed{\Sigma \text{ osservabile} \iff \ker(\mathcal{O}) = \{0\} \iff \text{rank}(\mathcal{O}) = n}$$

N.B. Se un sistema Σ a t.c. è osservabile allora $X_{NO}(t) = \{0\}$ per ogni $t > 0$!!

Esempio



$x_1(t) = i_{L_1}(t)$, $x_2(t) = i_{L_2}(t)$

$y(t) = i_R(t) = i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t)$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) & -R(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}) \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\mathcal{O}) = 1 \implies \Sigma$ non osservabile

Ricostruibilità (a t.c.) = osservabilità (a t.c.)

$$x^* = x(t) = e^{Ft}x_0 + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

misure $u(\tau)$, $y(\tau)$, $\tau \in [0, t]$

- stati iniziali compatibili con le misure: $x_0 + X_{NO}(t)$
- stati finali compatibili con le misure: $e^{Ft}x_0 + e^{Ft}X_{NO}(t) + \int_0^t e^{F(t-\tau)}Gu(\tau)\mathrm{d}\tau$
  $= x^* + e^{Ft}X_{NO}(t)$

$X_{NR}(t) = e^{Ft}X_{NO}(t)$ = spazio non ricostruibile nell'intervallo $[0, t]$

e^{Ft} invertibile $\Longrightarrow$ $\boxed{X_{NR}(t) = \{0\} \iff X_{NO}(t) = \{0\}}$

ricostruibilità = osservabilità !!

Sistema duale

sistema $\Sigma = (F, G, H)$

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

sistema duale $\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top)$

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

N.B. Qui consideriamo sistemi a t.d. ma tutto si applica a t.c.!

Sistema duale: raggiungibilità e controllabilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} H^\top & F^\top H^\top & \cdots & (F^\top)^{n-1} H^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ FH \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}^\top = \mathcal{O}^\top$$

Σ_d raggiungibile
$\Updownarrow$
Σ osservabile

$$\mathrm{im}((F^\top)^n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{R}_d \iff \ker(F^n) \supseteq \ker \mathcal{O}$$

Σ_d controllabile
$\Updownarrow$
Σ ricostruibile

Sistema duale: osservabilità e ricostruibilità

$$\Sigma_d: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= F^\top x(t) + H^\top u(t) \\ y(t) &= G^\top x(t) \end{aligned}$$

p ingressi
m uscite
n stati

$$\mathcal{O}_d = \begin{bmatrix} G^\top \\ G^\top F^\top \\ \vdots \\ G^\top (F^\top)^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{n-1} G \end{bmatrix}^\top = \mathcal{R}^\top$$

Σ_d osservabile
$\Updownarrow$
Σ raggiungibile

$$\ker((F^\top)^n) \supseteq \ker \mathcal{O}_d \iff \mathrm{im}(F^n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{R}$$

Σ_d ricostruibile
$\Updownarrow$
Σ controllabile

Dualità: forma di Kalman di raggiungibilità/osservabilità

$$
\begin{array}{ccc}
\Sigma_d \text{ non raggiungibile} & & \text{Forma di Kalman di raggiungibilità} \\
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) & \longrightarrow & \Sigma_{K,d} = \left(\begin{bmatrix} F_{11}^\top & F_{21}^\top \\ 0 & F_{22}^\top \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1^\top \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1^\top & G_2^\top \end{bmatrix} \right) \\
\updownarrow \text{ dualità} & & \updownarrow \text{ dualità} \\
\Sigma = (F, G, H) & \longrightarrow & \Sigma_K = \left(\begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
\Sigma \text{ non osservabile} & & \text{Forma di Kalman di osservabilità}
\end{array}
$$

$(F_{22}, 0)$ sottosistema non osservabile

Dualità: test PBH di raggiungibilità/osservabilità

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Test PBH di raggiungibilità} \\
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) & \longrightarrow & \Sigma_d \text{ raggiungibile} \iff \operatorname{rank}[zI - F^\top \;\; H^\top] = n,\ \forall z \in \mathbb{C} \\
\updownarrow \text{ dualità} & & \updownarrow \text{ dualità} \\
\Sigma = (F, G, H) & \longrightarrow & \Sigma \text{ osservabile} \iff \operatorname{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n,\ \forall z \in \mathbb{C} \\
 & & \text{Test PBH di osservabilità}
\end{array}
$$

Dualità: allocazione degli autovalori

$$\begin{array}{ccl}
\Sigma_d = (F^\top, H^\top, G^\top) & \longrightarrow & \begin{array}{c}\Sigma_d \text{ raggiungibile} \iff \\ \exists\, K \in \mathbb{R}^{p\times n}\colon\ F^\top + H^\top K \text{ ha autovalori desiderati}\end{array} \\
\updownarrow \text{ dualità} & & \qquad\qquad \updownarrow \text{ dualità} \\
\Sigma = (F, G, H) & \longrightarrow & \begin{array}{c}\Sigma \text{ osservabile} \iff \\ \exists\, L = K^\top \in \mathbb{R}^{n\times p}\colon\ F + LH \text{ ha autovalori desiderati}\end{array}
\end{array}$$

Proprietà equivalenti all'osservabilità

$$\Sigma\colon \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è osservabile se e solo se:

1. $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$.
2. Il sistema duale Σ_d è raggiungibile.
3. $\text{rank}\begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
4. Gli autovalori di $F + LH$ sono allocabili arbitrariamente tramite la matrice $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Proprietà equivalenti alla ricostruibilità

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Teorema: Il sistema Σ è ricostruibile se e solo se:

1. $\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O} = X_{NO}$.
2. Il sistema duale Σ_d è controllabile.
3. $\text{rank} \begin{bmatrix} zI - F \\ H \end{bmatrix} = n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.
4. Esiste una matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tale che $F + LH$ ha tutti gli autovalori nulli.

N.B. Parlare di ricostruibilità ha senso solo a t.d.!