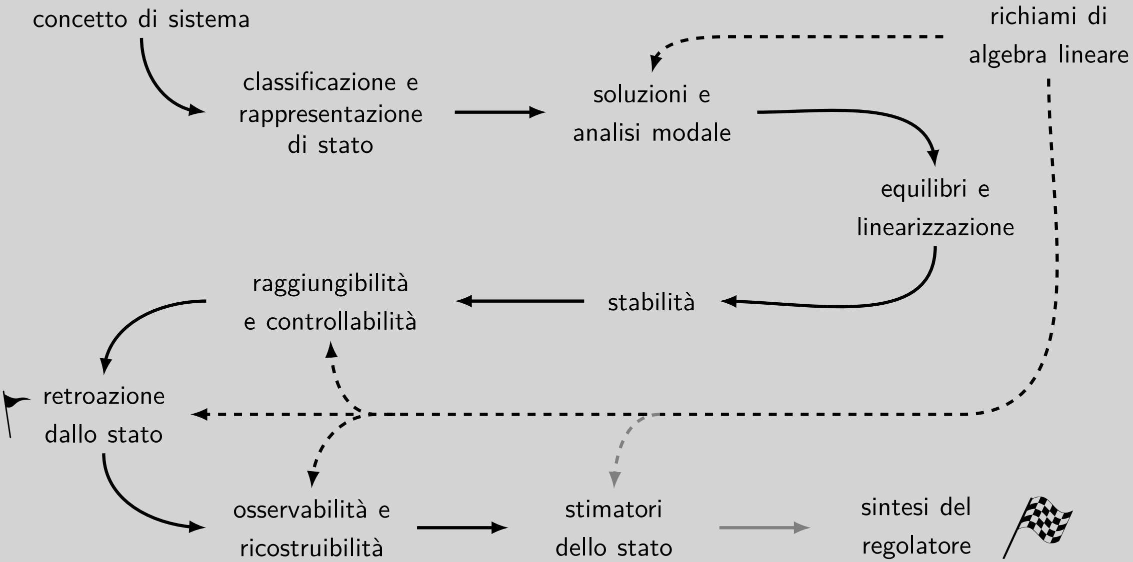
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

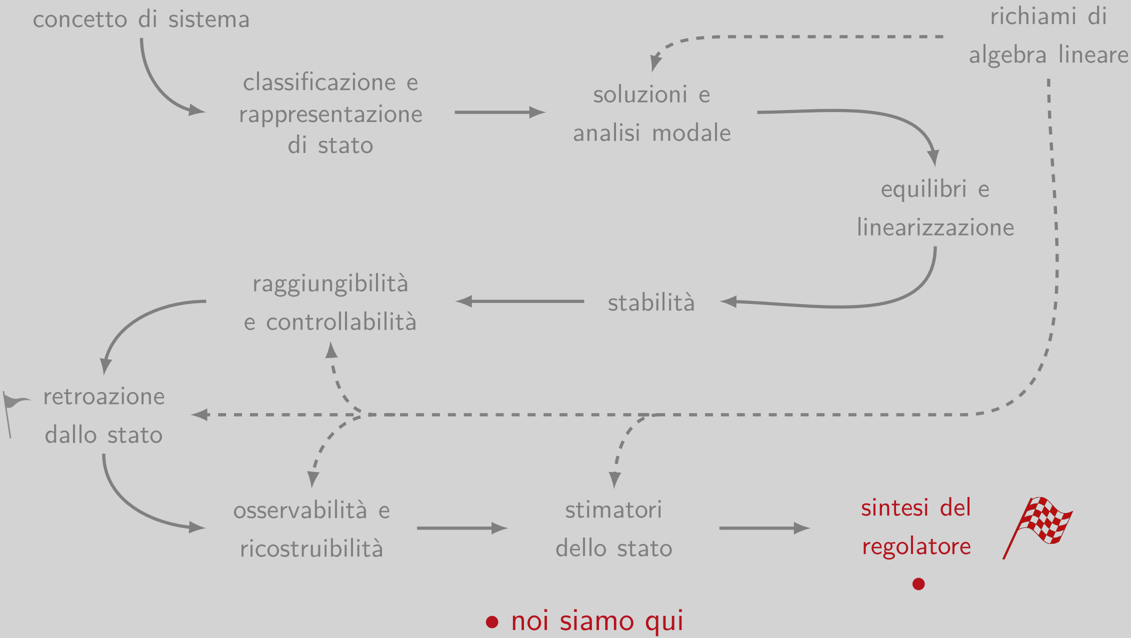
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 21: Sintesi del regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- Sistema duale e sue proprietà
- Proprietà equivalenti all'osservabilità e alla ricostruibilità
- Stimatori dello stato
- Rivelabilità

In questa lezione

- ▷ Il regolatore: definizione e struttura
  - ▷ Proprietà del regolatore
    - ▷ Esempio

In questa lezione

- ▷ Il regolatore: definizione e struttura
- ▷ Proprietà del regolatore
- ▷ Esempio

Il regolatore

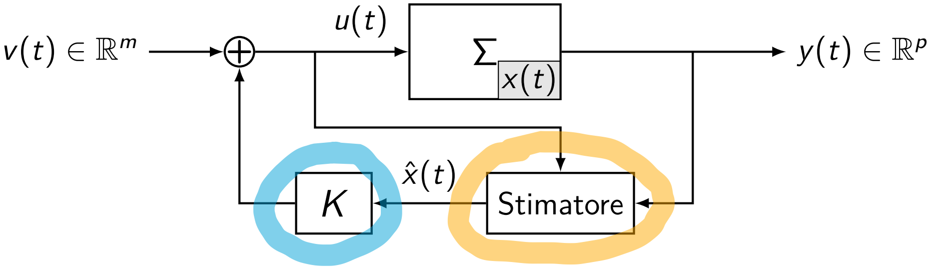
$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati

Il regolatore

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

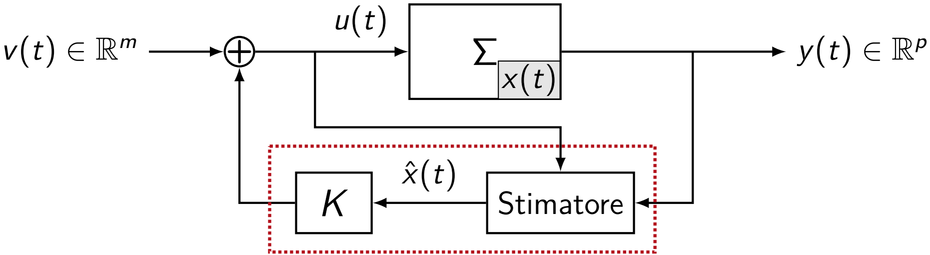
m ingressi
p uscite
n stati



Il regolatore

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

m ingressi
p uscite
n stati



regolatore

= stimatore dello stato + controllo in retroazione dallo stato

Il regolatore: equazioni dinamiche

extra

sistema Σ:
$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

Il regolatore: equazioni dinamiche

extra

sistema Σ:
$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

$\Longrightarrow$ regolatore:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F + GK + LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Regolatori stabilizzanti

regolatore:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Definizione: Un regolatore si dice stabilizzante se il sistema che descrive il regolatore è asintoticamente stabile.

Definizione: Il regolatore si dice stabilizzante in tempo finito o dead-beat se l'evoluzione dello stato del sistema regolatore va a zero in un numero finito di passi.

In questa lezione

- ▷ Il regolatore: definizione e struttura
- ▷ Proprietà del regolatore
- ▷ Esempio

Principio di separazione

extra

regolatore:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

Principio di separazione

extra

regolatore:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Principio di separazione

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{autovalori di } \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} = \text{autovalori di } F+GK \cup \text{autovalori di } F+LH \text{ !!!}}$$

Principio di separazione

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{autovalori di } \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} = \text{autovalori di } F+GK \cup \text{autovalori di } F+LH \text{ !!!}}$$

Principio di separazione: Gli autovalori del sistema regolatore sono l'unione di quelli delle due matrici $F+GK$ e $F+LH$. Quindi la sintesi della legge di controllo in retroazione (allocazione degli autovalori di $F+GK$) e la sintesi dello stimatore (allocazione degli autovalori di $F+LH$) possono essere effettuate in modo indipendente.

Esistenza di regolatori stabilizzanti

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore stabilizzante se e solo se Σ è sia stabilizzabile che rivelabile.

Teorema: Dato un sistema Σ il sistema ammette un regolatore dead-beat se e solo se Σ è sia stabilizzabile che rivelabile in tempo finito. Equivalentemente, un regolatore dead-beat esiste se e solo se Σ è sia controllabile che ricostruibile.

Matrice di trasferimento del regolatore

extra

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Matrice di trasferimento del regolatore

extra

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= H(zI-(F+GK))^{-1}G \end{aligned}$$

matrice di trasferimento del regolatore

||

matrice di trasferimento del sistema retroazionato dallo stato !!!

In questa lezione

- ▷ Il regolatore: definizione e struttura
- ▷ Proprietà del regolatore
- ▷ Esempio

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, un regolatore dead-beat.

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, un regolatore dead-beat.

Il sistema è controllabile e ricostruibile per cui un regolatore dead-beat esiste.

Il regolatore dead-beat ha matrici $K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 21: Sintesi del regolatore

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Il regolatore: equazioni dinamiche

extra

sistema Σ:
$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t)$$

legge di controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore dello stato: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

back

$$\Sigma: \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned}$$

controllo: $u(t) = K\hat{x}(t) + v(t)$

stimatore: $\hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + Gu(t) - L(y(t) - H\hat{x}(t))$

Σ regolatore:

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + GK\hat{x}(t) + Gv(t) \\ \hat{x}(t+1) = F\hat{x}(t) + GK\hat{x}(t) + Gv(t) - LHx(t) + LH\hat{x}(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix}}^{F_{reg}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix}}^{G_{reg}} v(t) \\ y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}}_{H_{reg}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

back

Principio di separazione

extra

regolatore:
$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} v(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

Consideriamo il cambio di base $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$ e sia $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

back

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$z(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

errore di stima

$$\bar{F}_{reg} = T^{-1} F_{reg} T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & GK \\ -LH & F+GK+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F & GK \\ F+LH & \cancel{GK} - F - \cancel{GK} - LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} F+GK & -GK \\ \hline 0 & F+LH \end{array}\right]$$

back

$$\bar{G}_{reg} = T^{-1} G_{reg} = T^{-1} \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{H}_{reg} = H_{reg} T = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di trasferimento del regolatore

extra

regolatore nella base T:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$$

back

$$W(z) = H_{reg}(zI - F_{reg})^{-1} G_{reg} = \bar{H}_{reg}(zI - \bar{F}_{reg})^{-1} \bar{G}_{reg}$$

$$= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} F+GK & -GK \\ 0 & F+LH \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - F - GK & GK \\ 0 & zI - F - LH \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

back

$$= \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - F - GK)^{-1} & * \\ 0 & (zI - F - LH)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= H\,(zI - F - GK)^{-1}\,G$$

Esempio

extra

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Costruire, se esiste, un regolatore dead-beat.

back

$$x(t+1) = \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{0 \quad 1}^{F_{11}} & & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \underbrace{0}_{F_{22}} \end{array}\right] x(t) + G_1\left\{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]\right. u(t)$$

$$y(t) = \left[\begin{array}{cc|c} \underbrace{1 \quad 1}_{H_1} & & 0 \end{array}\right] x(t)$$

- Esistenza

$\exists$ regolatore dead-beat $\Leftrightarrow$ Σ è sia stabilizzabile che rivelabile in tempo finito

(F_{11}, G_1) raggiungibile $\Leftrightarrow$ $R_{11} = [G_1 \quad F_{11}G_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\checkmark$

Σ è in forma di Kalman di raggiungibilità

back

(F_{11}, H_1) osservabile $\iff \mathcal{O}_{11} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 F_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ✓

Σ è in forma di Kalman di osservabilità

$F_{22} = 0$ sottosistema non ragg. / non oss.

$\downarrow$

ha autovalori in 0 $\Rightarrow$ Σ è stabilizzabile e rivelabile in tempo finito

$\Rightarrow \exists$ regolatore dead-beat

back

- Calcolo di K/L

Calcolo di K

$K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]$ $\qquad p(\lambda) = \lambda^3$

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1-k_1 & \lambda-1-k_2 & -k_3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\left(\lambda(\lambda-1-k_2) - 1 - k_1\right)$$

$$= \lambda^3 - (1+k_2)\lambda^2 - (1+k_1)\lambda \overset{!}{=} \lambda^3$$

$$\begin{cases} 1+k_2 = 0 \\ 1+k_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k_2 = -1 \\ k_1 = -1 \end{cases}$$

k_3 qualsiasi

$K = [-1 \quad -1 \quad k_3]$, k_3 qualsiasi

<u>Calcolo L</u>

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = \lambda^3$$

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & l_1 & 0 \\ l_2 & l_2 & 0 \\ l_3 & l_3 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda - l_1 & -1-l_1 & 0 \\ -1-l_2 & \lambda-1-l_2 & 0 \\ -l_3 & -l_3 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\Big((\lambda - l_1)(\lambda-1-l_2) - (1+l_1)(1+l_2) \Big)$$

$$= \lambda\Big(\lambda^2 - \lambda(l_1+1+l_2) + l_1(1+l_2) - (1+l_1)(1+l_2) \Big)$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2(l_1+l_2+1) + \cancel{l_1} + \cancel{l_1 l_2} - 1 - \cancel{l_1} - l_2 - \cancel{l_1 l_2} \overset{!}{=} \lambda^3$$

back

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + 1 = 0 \\ 1 + l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = -1 \end{cases} \quad l_3 \text{ qualsiasi} \qquad L = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

l_3 qualsiasi